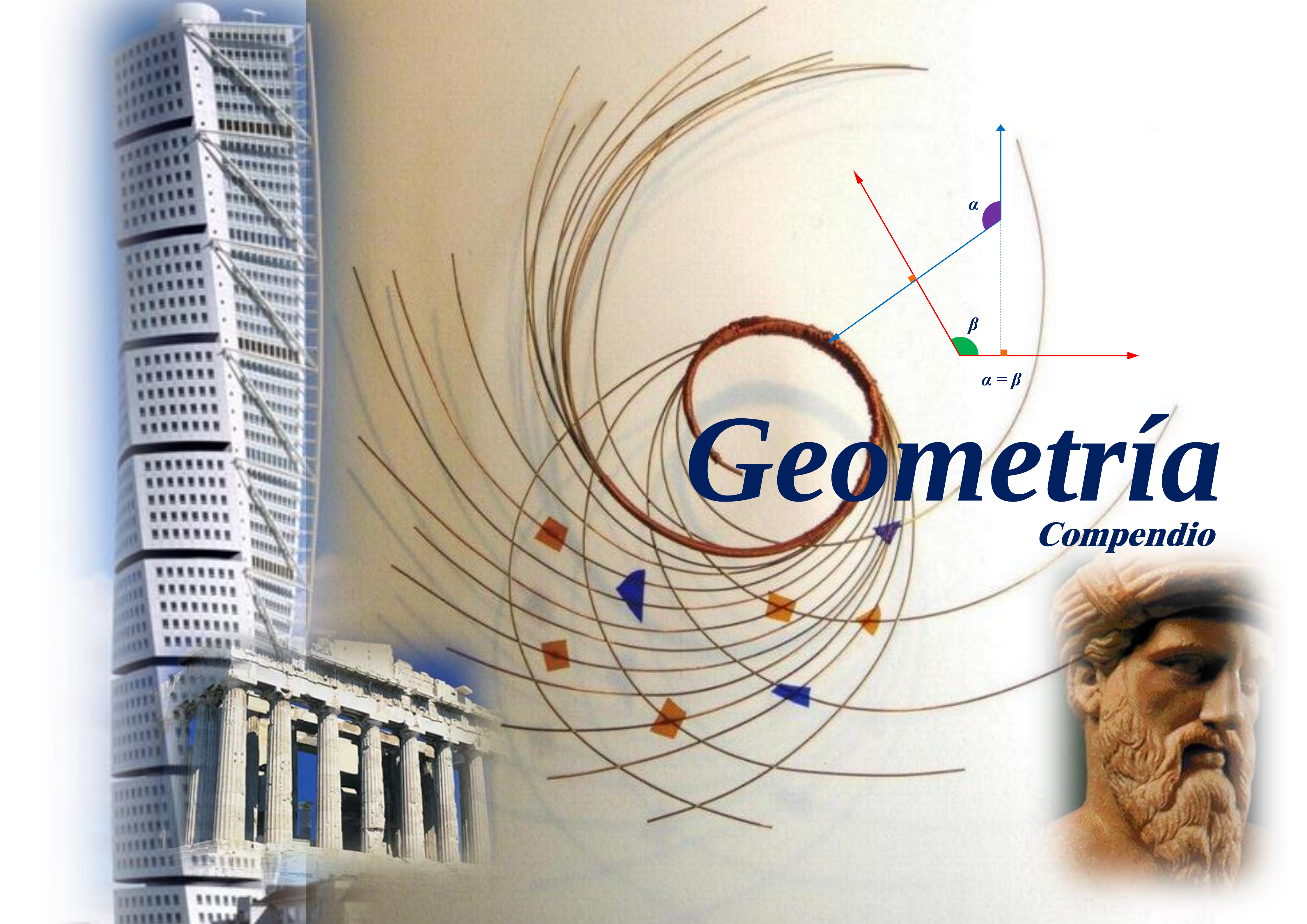


Geometría

Compendio

GEOMETRÍA PLANA O PLANIMETRÍA

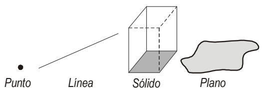
CAPÍTULO I

ANGULOS: DEFINICIÓN, CLASIFICACIÓN Y PROPIEDADES.

Elementos de Geometría

Figura geométrica

Es la abstracción que se tiene de la forma de un objeto real o inexistente.



1. *Punto*
2. *Plano*
3. *Espacio*
4. *Línea*
5. *Línea Recta*
6. *Rayo*
7. *Semirrecta*
8. *Segmento de recta*

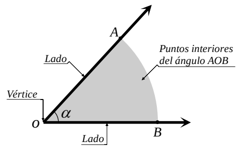
Los 5 postulados de Euclides.

1. *Una recta puede trazarse desde un punto cualquiera hasta otro.*
2. *Una recta finita puede prolongarse continuamente y hacerse una recta ilimitada o indefinida.*
3. *Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.*
4. *Por un punto cualesquiera como centro y radio arbitrario se pueden trazar una circunferencia.*
5. *Si una recta que corta a otras dos forma uno de estos ángulos interiores del mismo lado de ella, que sumados sean menores que dos rectos, las dos rectas, al prolongarse indefinidamente, se cortarán del lado en que dicha suma de ángulos sea menor que dos rectos.*

"… No voy a dejar de hablarle sólo porque no me esté escuchando. Me gusta escucharme a mí mismo. Es uno de mis mayores placeres. A menudo mantengo largas conversaciones conmigo mismo, y soy tan inteligente que a veces no entiendo ni una palabra de lo que digo…" OSCAR WILDE.

DEFINICIÓN

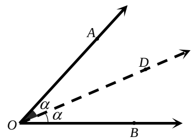
ÁNGULO



$\angle AOB: angulo\ \ AOB$

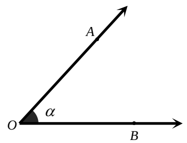
$m\measuredangle AOB = \alpha : medida\ del\ angulo\ \ AOB$

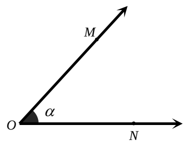
Bisectriz de un ángulo



$\overline{OD}$: bisectriz del $\measuredangle AOB$

Ángulos Congruentes





Si $m\measuredangle AOB = m\measuredangle MON = \alpha$

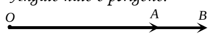
Entonces :

$\boxed{\measuredangle AOB \cong \measuredangle MON}$

CLASIFICACIÓN

SEGÚN SU MEDIDA

1. *Ángulo nulo o perígono.*

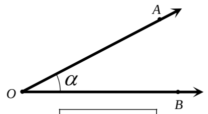


$\boxed{m\measuredangle AOB = 0^o}$

2. *Ángulo convexo*

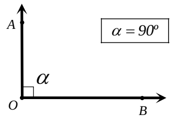
$\boxed{0^o < \alpha < 180^o}$

ÁNGULO AGUDO



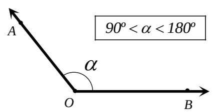
$\boxed{0^o < \alpha < 90^o}$

ÁNGULO RECTO



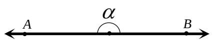
$\boxed{\alpha = 90^o}$

ÁNGULO OBTUSO



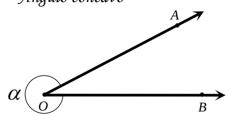
$\boxed{90^o < \alpha < 180^o}$

3. *Ángulo llano*



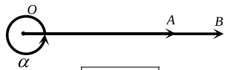
$\boxed{\alpha = 180^o}$

4. *Ángulo cóncavo*



$\boxed{180 < \alpha < 360^o}$

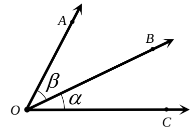
5. *Ángulo de "una vuelta"*

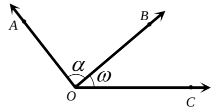


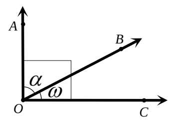
$\boxed{\alpha = 360^o}$

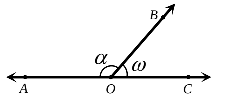
SEGÚN LA POSICIÓN DE SUS LADOS

1. *Ángulos adyacentes.*

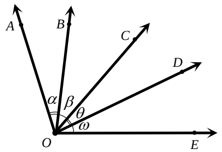




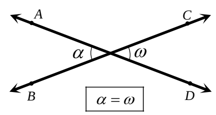




2. *Ángulos consecutivos*



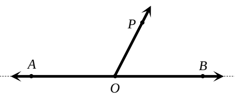
3. *Ángulos opuestos por el vértice*



$\boxed{\alpha = \omega}$

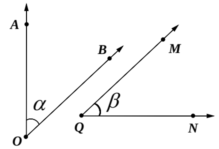
PAR LINEAL

Los ángulos AOP y POB forman un par lineal.



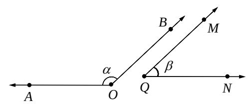
SEGÚN LA FORMA DE SUS MEDIDAS

1. *Ángulos complementarios.*



$\boxed{\alpha + \beta = 90^o}$

2. *Ángulos suplementarios.*



$\boxed{\alpha + \beta = 180^o}$

OBSERVACIÓN

Complemento (C_α):

Es lo que le falta a un ángulo para que su medida llegue a ser 90º.

$\boxed{C_\alpha = 90^o - \alpha}$

Suplemento (S_α):

Es lo que le falta a un ángulo para que su medida llegue a ser 180º.

$\boxed{S_\alpha = 180^o - \alpha}$

Ángulos que se determinan

1. *Ángulos correspondientes*
   $(\alpha;\phi), (\beta;\psi), (\omega;\sigma), (\theta;\gamma)$
2. *Ángulos alternos*
   Internos: $(\theta;\ \phi)$, $(\omega;\ \psi)$.
   Externos: $(\alpha;\ \gamma)$, $(\beta;\ \sigma)$.
3. *Ángulos conjugados*
   - Internos: $(\omega;\ \phi)$, $(\theta;\ \psi)$.
   - Externos: $(\alpha;\ \sigma)$, $(\beta;\ \gamma)$.

OBSERVACIÓN

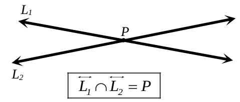
En el ***caso a).*** Los ángulos que se determinan son indistintos.

En el ***caso b).*** Los ángulos correspondientes y alternos son congruentes, mientras que los conjugados son suplementarios.

DOS RECTAS

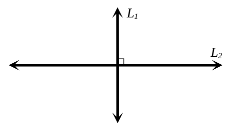
POSICIONES RELATIVAS DE DOS RECTAS EN EL PLANO

1. *Rectas secantes*

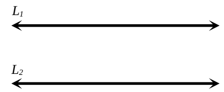


$\boxed{L_1 \cap L_2 = P}$

2. *Rectas perpendiculares*

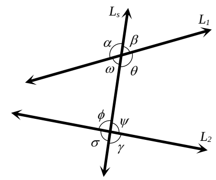


3. *Rectas paralelas.*

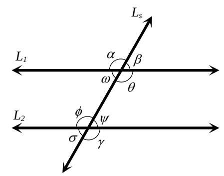


DOS RECTAS CORTADAS POR UNA TRANSVERSA

a). $\overleftrightarrow{L_1}$ no // $\overleftrightarrow{L_2}$



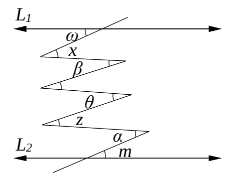
b). $\overleftrightarrow{L_1}$ // $\overleftrightarrow{L_2}$



PROPIEDADES

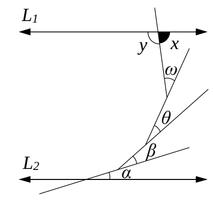
PROPIEDADES

- ✓ $SC_\alpha = 90^o + \alpha \quad \cdots\cdots \quad (0^o < \alpha < 90^o)$
- ✓ $CS_\alpha = \alpha - 90^o \quad \cdots\cdots \quad (90^o < \alpha < 180^o)$
- ✓ $SCS_\alpha = 270^o - \alpha \quad \cdots\cdots \quad (90^o < \alpha < 180^o)$
- ✓ $S_\alpha - C_\alpha = 90^o;\quad 0^o \le \alpha \le 90^o$
- ✓ $S_\alpha + C_\alpha = 270^o - 2\alpha;\quad 0^o \le \alpha \le 90^o$
- ✓ $\underbrace{CCC\cdots CCC_x}_{"n"\ veces} = \begin{cases} x & ;\ si\ "n"\ es\ par \\ 90^o - x; & si\ "n"\ es\ impar \end{cases}$
- ✓ $\underbrace{SSS\cdots SSS_x}_{"n"\ veces} = \begin{cases} x & ;\ si\ "n"\ es\ par \\ 180^o - x; & si\ "n"\ es\ impar \end{cases}$
- ✓ El ángulo formado por las bisectrices de dos ángulos consecutivos y complementarios es igual a 45º.
- ✓ El ángulo formado por las bisectrices de dos ángulos consecutivos y suplementarios es igual a 90º.
- ✓ En la figura si $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$



$\boxed{x + y + z + m = \alpha + \beta + \theta + \omega}$

- ✓ En la figura



$\boxed{x = \alpha + \beta + \theta + \omega}$

$\boxed{\alpha + \beta + \theta + \omega + x = 180^o}$

EL GROVEROSO

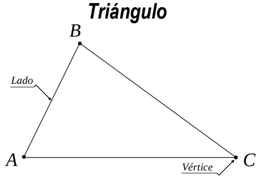
CAPÍTULO II

GEOMETRÍA PLANA O PLANIMETRÍA

TRIANGULOS: Definición, Clasificación y Propiedades.

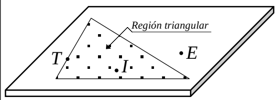
Definición

Triángulo



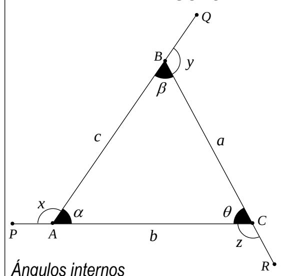
ΔABC: Triangulo ABC

Región Triangular



I: Punto interior al triángulo.
T: Punto que pertenece al triángulo.
E: Punto exterior al triángulo.

MEDIDAS DETERMINADOS EN ELTRIÁNGULO



Ángulos internos
$\measuredangle BAC,\ \measuredangle ABC,\ \measuredangle ACB$

Medida de ángulos internos
$m\measuredangle BAC = \alpha,\ m\measuredangle ABC = \beta,$
$m\measuredangle ACB = \theta$

Ángulos externos
$\measuredangle PAB,\ \measuredangle QBC,\ \measuredangle RCA$

Medida de ángulos externos
$m\measuredangle PAB = x,\ m\measuredangle QBC = y,$
$m\measuredangle RCA = z$

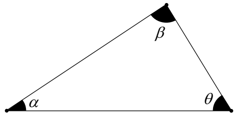
Lados $\overline{AB},\ \overline{BC},\ \overline{AC}$

Longitud de lados
$AB = c,\ BC = a,\ AC = b$

Perímetro y semiperímetro
$2p = a+b+c \qquad p = \dfrac{a+b+c}{2}$

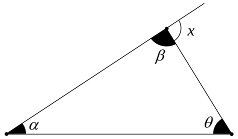
Teoremas

1. *Suma de las medidas de los ángulos internos.*



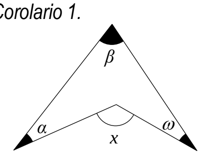
$\boxed{\alpha+\beta+\theta = 180^o}$

2. *Medida de un ángulo exterior.*



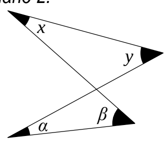
$\boxed{x = \alpha+\theta}$

Corolario 1.



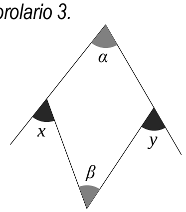
$\boxed{x = \alpha+\beta+\omega}$

Corolario 2.



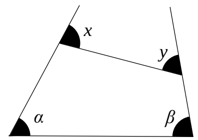
$\boxed{x+y = \alpha+\beta}$

Corolario 3.



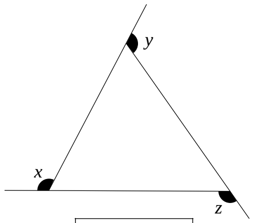
$\boxed{x+y = \alpha+\beta}$

Corolario 4.



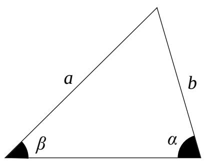
$\boxed{x+y = \alpha+\beta}$

3. *Suma de las medidas de los ángulos exteriores.*



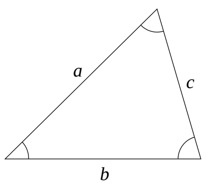
$\boxed{x+y+z = 360^o}$

4. *Prop. de correspondencia.*



$\boxed{a > b \Leftrightarrow \alpha > \beta}$

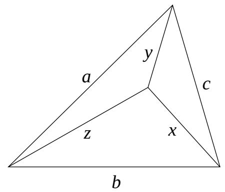
5. *Prop. Existencia del triángulo.*



Se cumple:

$$\boxed{\begin{array}{l} |b-c| < a < |b+c| \\ |a-c| < b < |a+c| \\ |a-b| < c < |a+b| \end{array}}$$

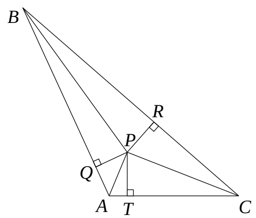
6. *Teorema*



$\boxed{p < x+y+z < 2p}$,

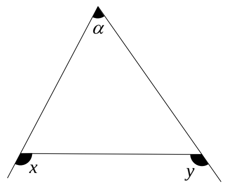
$\boxed{p < \dfrac{a+b+c}{2}}$

7. *Teorema de Erdos Mordell*



$\boxed{AP+BP+CP \geq 2(PQ+PR+PT)}$

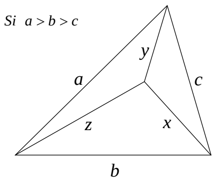
8. *Teorema*



$\boxed{x+y = 180+\alpha}$

9. *Teorema de Visschers*

Si $a > b > c$

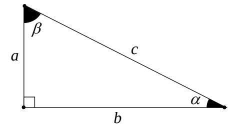


$\boxed{x+y+z < a+b}$

Clasificación

SEGÚN LA MEDIDA DE SUS ÁNGULOS

1. *Triángulo rectángulo.*

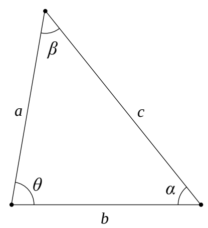


$\boxed{c > a \quad \wedge \quad c > b}$

$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$

$\boxed{\text{Si } 2p = a+b+c \Rightarrow c > \frac{1}{3}(2p)}$

2. *Triángulo oblicuángulo.*
   - ✓ *T. acutángulo*



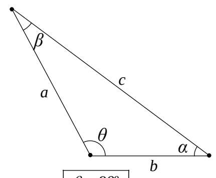
$\boxed{\begin{array}{l} \alpha < 90^o, \\ \beta < 90^o, \\ \theta < 90^o \end{array}}$

$\boxed{c^2 < a^2 + b^2}$

ó

$\boxed{\sqrt{a^2 - b^2} - c^2 < \sqrt{a^2 + b^2}}$

   - ✓ *T. Obtusángulo*



$\boxed{\begin{array}{l} \theta > 90^o, \\ \alpha < 90^o \\ \alpha < 90^o \end{array}}$

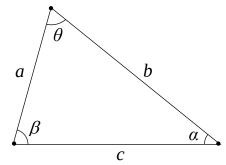
$\boxed{c^2 > a^2 + b^2}$

ó

$\boxed{\sqrt{a^2 + b^2} < c < a+b}$

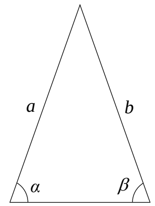
SEGÚN LA MEDIDA DE SUS LADOS

1. *T. Escaleno*



$\boxed{a \neq b \neq c \quad \Rightarrow \quad \alpha \neq \beta \neq \theta}$

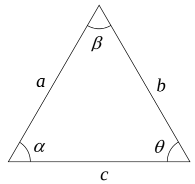
2. *T. Isósceles*



$\boxed{a = b \quad \Rightarrow \quad \alpha = \beta}$

α, β: angulos basales

3. *T. equilátero*



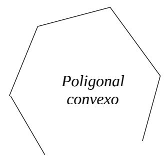
$\boxed{a = b = c \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \beta = \theta}$

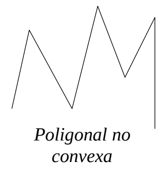
“ ... Lo menos frecuente en este mundo es vivir. La mayoría de la gente existe, eso es todo...”

EL GROVEROSO

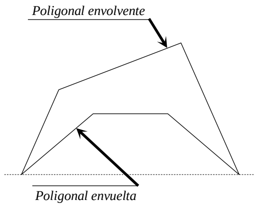
OBSERVACIÓN

POLIGONAL
Conjunto de dos o más segmentos consecutivos que siguen diferentes direcciones.



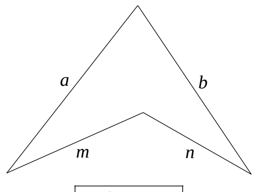


Poligonal envolvente y envuelta



PROPIEDAD.

Toda poligonal envuelta es menor que su respectiva poligonal envolvente, de la misma naturaleza.



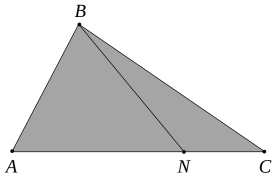
$\boxed{a+b > m+n}$

CAPÍTULO III

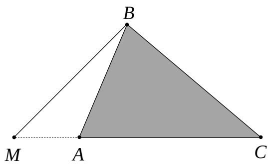
LÍNEAS NOTABLES ASOCIADAS AL TRIÁNGULO

Líneas Notables

1. CEVIANA.



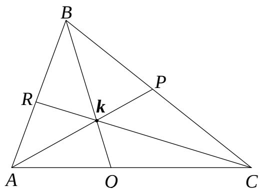
$\overline{BN}$: ceviana interior del ΔABC

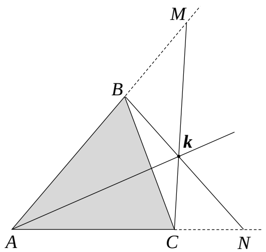


$\overline{BM}$: ceviana exterior del ΔABC

Observaciones

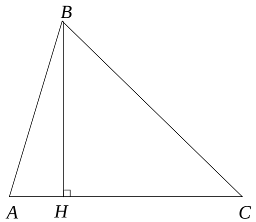
*Todo triángulo tiene infinitas **cevianas** e infinitos **cevacentros**, por lo que no es considerado como línea o punto notable respectivamente.*



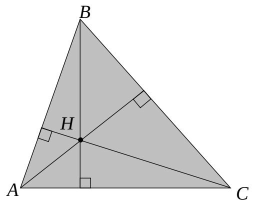


k : Cevacentro

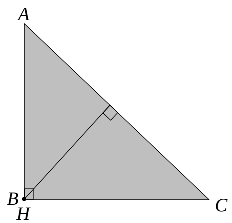
2. ALTURA.



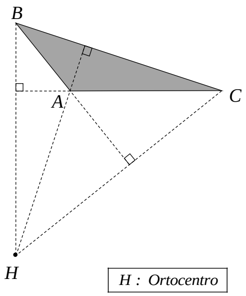
T. Acutángulo



T. Rectángulo



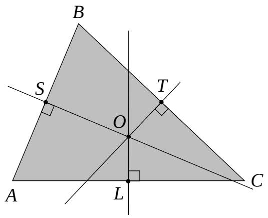
T. Obtusángulo



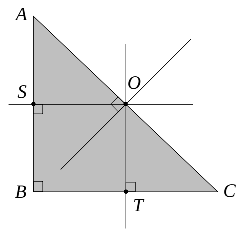
H : Ortocentro

3. MEDIATRIZ

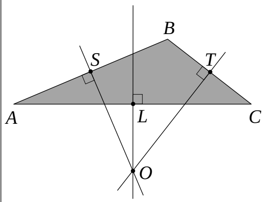
T. Acutángulo



T. Rectángulo



T. Obtusángulo



O : CIRCUNCENTRO

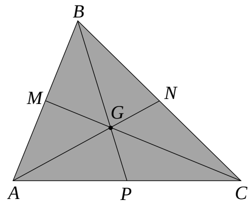
Se tiene:

$AS = SB,\quad BT = TC,\quad AL = LC$

Se cumple:

$OA = OB = OC$

4. MEDIANA



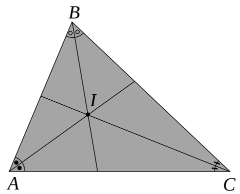
G : Baricentro

Se cumple:

$$\frac{AG}{GM} = \frac{BG}{GN} = \frac{CG}{GP} = 2$$

5. BISECTRIZ

a). Bisectriz interior

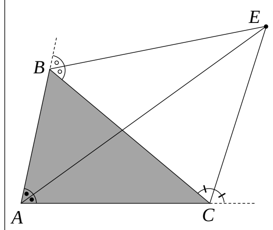


I : Incentro

Se cumple:

$$d\left(I,\overline{AB}\right) = d\left(I,\overline{BC}\right) = d\left(I,\overline{AC}\right)$$

b). Bisectriz exterior



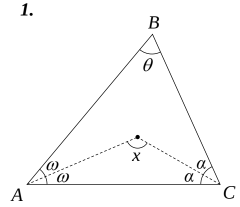
E : Excentro

Se cumple:

$$d\left(E,\overline{AB}\right) = d\left(E,\overline{BC}\right) = d\left(E,\overline{AC}\right)$$

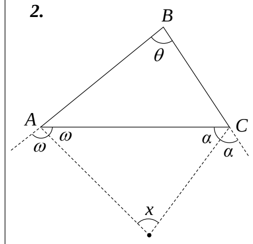
PROPIEDADES

1.



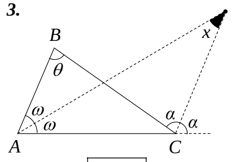
$$x = 90^{o} + \frac{\theta}{2}$$

2.



$$x = 90^{o} - \frac{\theta}{2}$$

3.

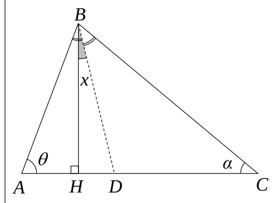


$$x = \frac{\theta}{2}$$

4.

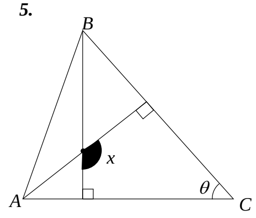
$\overline{BH}$: altura

$\overline{BD}$: bisectriz del $\measuredangle ABC$



$$x = \frac{\theta - \alpha}{2}$$

5.

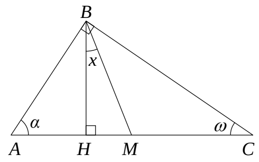


$x = 180^{o} - \theta = S_{\theta}$

6.

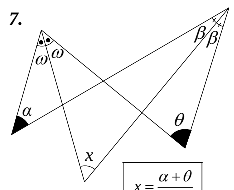
$\overline{BH}$: altura

$\overline{BM}$: mediana relat. hipot.



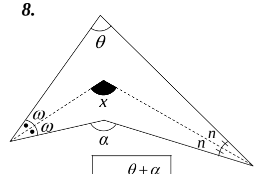
$x = \alpha - \omega$

7.



$$x = \frac{\alpha + \theta}{2}$$

8.



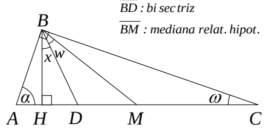
$$x = \frac{\theta + \alpha}{2}$$

9.

$\overline{BH}$: altura

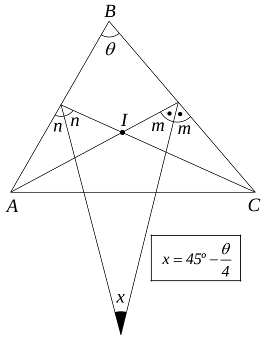
$\overline{BD}$: bisectriz

$\overline{BM}$: mediana relat. hipot.



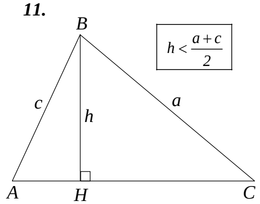
$x = w$

10. I : Incentro



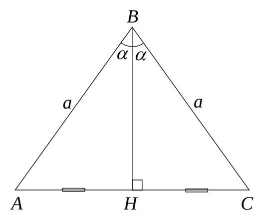
$$x = 45^{o} - \frac{\theta}{4}$$

11.



$$h < \frac{a + c}{2}$$

12. En todo triángulo isósceles



$\overline{BH}$, Es Altura, Bisectriz, Mediana contenidas en una mediatriz.

" … Cualquiera puede simpatizar con las penas de un amigo; simpatizar con sus éxitos requiere una naturaleza delicadísima… "

EL GROVEROSO

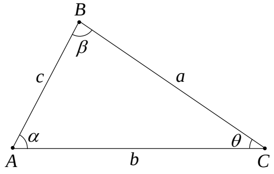
CAPÍTULO IV

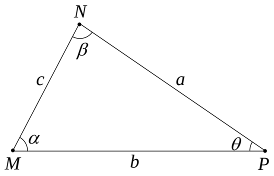
GEOMETRÍA PLANA O PLANIMETRÍA

CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS.

DEFINICIÓN

Dados los triángulos ABC y MNP.





Lados correspondientes

$AB = MN = c$

$BC = NP = a$

$AC = MP = b$

Ángulos correspondientes

$m\measuredangle A = m\measuredangle M = \alpha$

$m\measuredangle B = m\measuredangle N = \beta$

$m\measuredangle C = m\measuredangle P = \theta$

Por tanto:

$\boxed{\Delta ABC \cong \Delta MNP}$

"… La experiencia no tiene valor ético alguno, es simplemente el nombre que damos a nuestros errores…"

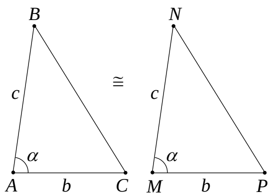
OSCAR WILDE.

EL GROVEROSO

POSTULADOS

POSTULADO 1.

LAL (Lado – Ángulo – Lado)

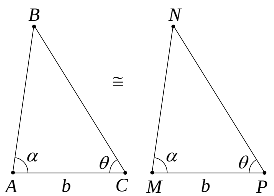


Toda correspondencia **LAL** es una congruencia.

$\therefore \quad \boxed{\Delta ABC \cong \Delta MNP}$

POSTULADO 2.

ALA (Ángulo – Lado – Ángulo)

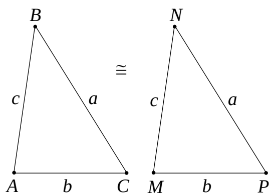


Toda correspondencia **ALA** es una congruencia.

$\therefore \quad \boxed{\Delta ABC \cong \Delta MNP}$

POSTULADO 3.

LLL (Lado – Lado – Lado)

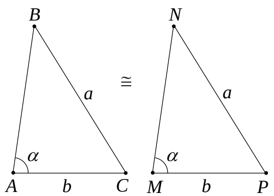


Toda correspondencia **LLL** es una congruencia.

$\therefore \quad \boxed{\Delta ABC \cong \Delta MNP}$

POSTULADO 4.

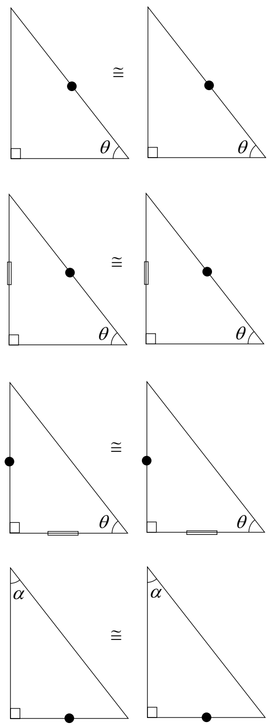
ALL_m (Ángulo – Lado – Lado menor)



Toda correspondencia **ALL_m** es una congruencia.

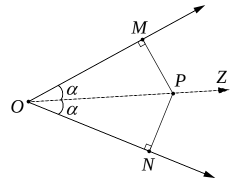
$\therefore \quad \boxed{\Delta ABC \cong \Delta MNP}$

CONSECUENCIAS



APLICACIONES DE LA CONGRUENCIA

1. Teor. Bisectriz de un ángulo.

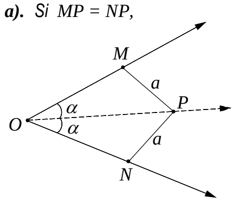


$\overline{OZ}$: bisectriz del $\measuredangle MON$.

$\boxed{MP = NP}$

OBS:

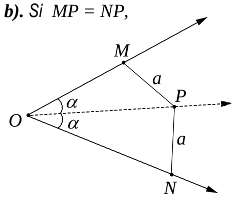
a). Si $MP = NP$,



$\overline{OZ}$: bisectriz del $\measuredangle MON$.

$\Rightarrow \quad \boxed{OM = ON}$

b). Si $MP = NP$,

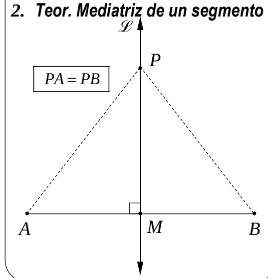


$\overline{OZ}$: bisectriz del $\measuredangle MON$.

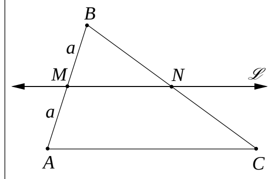
$\Rightarrow \quad \boxed{OM < ON}$

2. Teor. Mediatriz de un segmento

$\boxed{PA = PB}$



3. Teor. Puntos medios.

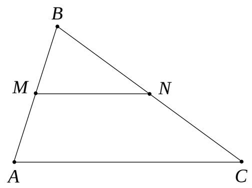


Si $AM = MB$ y $\mathscr{L} // \overline{AC}$

Se cumple que:

$\boxed{BN = NC}$

4. Teor. Base media.



Si $AM = MB$ y $BN = BC$

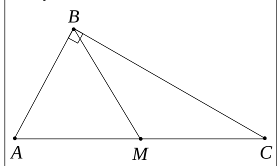
Se cumple que:

$\boxed{MN = AC}$

Además:

$\boxed{MN = \frac{1}{2}(AC)}$

5. Teor. Mediana relativa a la hipotenusa.



Si $AM = MC$

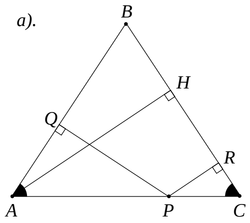
Se cumple que:

$\boxed{BM = \frac{1}{2}(AC)}$

PROPIEDADES EN TRIANG. EQUILÁT. Y EQUIÁNG.

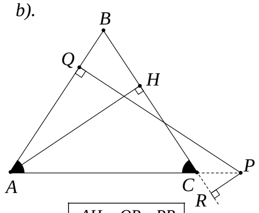
1. En todo triángulo isósceles.

a).



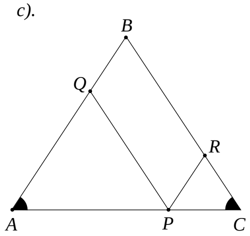
$\boxed{AH = PQ + PR}$

b).



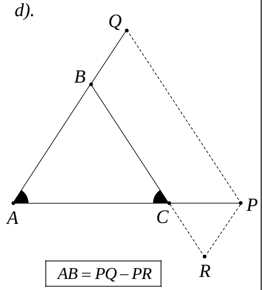
$\boxed{AH = QP - PR}$

c).



$\boxed{AB = PQ + PR}$

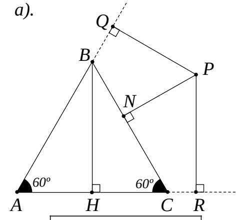
d).



$\boxed{AB = PQ - PR}$

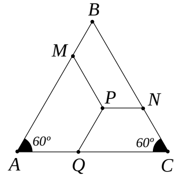
2. En todo triángulo equilátero.

a).



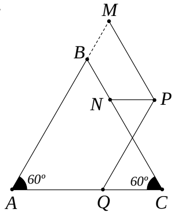
$\boxed{BH = PQ + PR - PN}$

b).



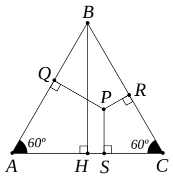
$\boxed{l = PM + PN + PQ}$

c).



$\boxed{AB = PQ + PR}$

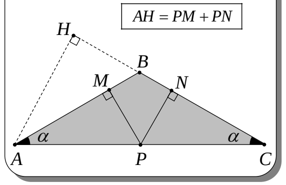
d).



$\boxed{BH = PQ + PR + PS}$

e).**Consecuencia**

$\boxed{AH = PM + PN}$



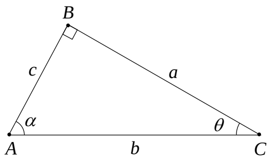
CAPÍTULO V

GEOMETRÍA PLANA O PLANIMETRÍA

TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS NOTABLES.

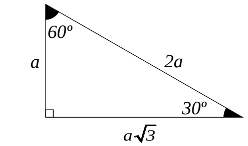
TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS NOTABLES EXACTOS

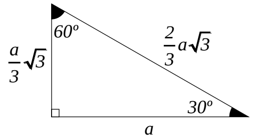
TEOREMA DE PITÁGORAS



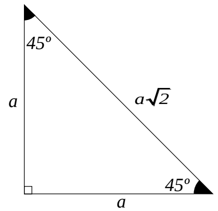
$b^2 = a^2 + c^2 \Leftrightarrow \alpha + \theta = 90º$

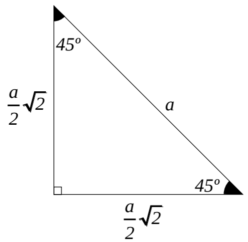
a). De 30º y 60º



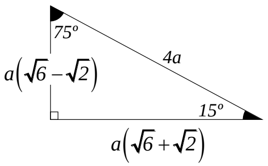


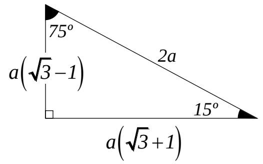
b). De 45º

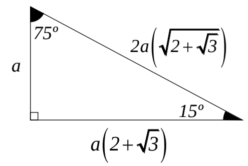




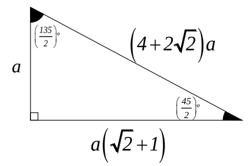
c). De 15º y 75º

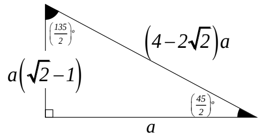




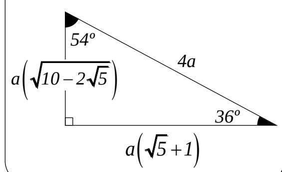


d). De (45/2)º y (135/2)º

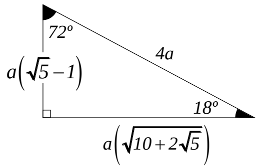




e). De 36º y 54º

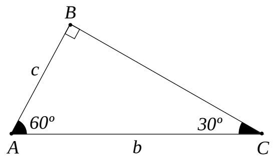


f). De 18º y 72º



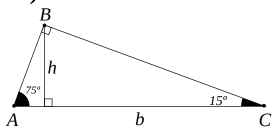
APLICACIONES

1).



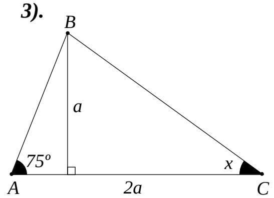
$b=2c$

2).



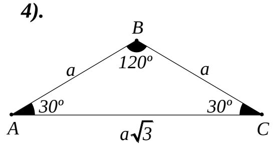
$h=\frac{b}{4}$

3).



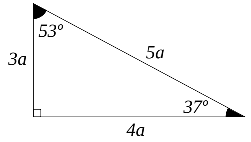
$x=30º$

4).

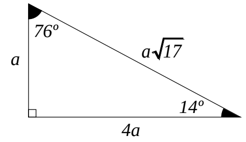


TRIÁNG. RECTÁNG. NOTABLES APROXIMADOS

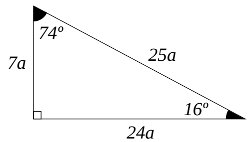
a). De 37º y 53º



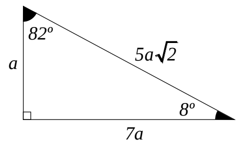
b). De 14º y 76º



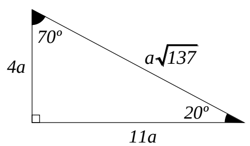
c). De 16º y 74º



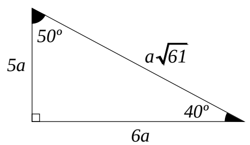
d). De 8º y 82º



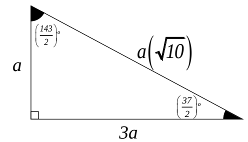
e). De 20º y 70º



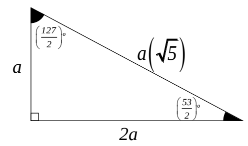
f). De 40º y 50º



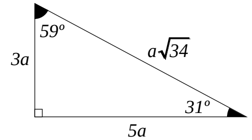
g). De (37/2)º y (143/2)º



h). De (53/2)º y (127/2)º



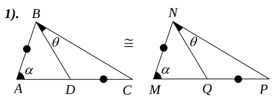
i). De 31º y 59º



OTROS CASOS DE CONGRUENCIA

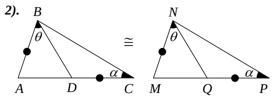
Existen problemas de triángulos, que no es posible su resolución utilizando solamente algunos de los cuatro casos de congruencia de triángulos.
Veamos a continuación dos de los otros casos de congruencia de triángulos que existen:

1).



$\Delta ABC \cong \Delta MNP$

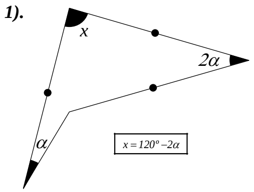
2).



$\Delta ABC \cong \Delta MNP$

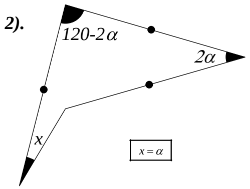
PROPIEDADES EN CUADRILÁTEROS NOCONVEXOS

1).



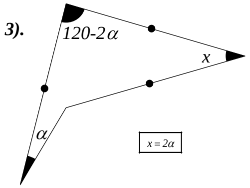
$x=120º-2\alpha$

2).



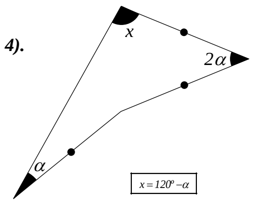
$x=\alpha$

3).



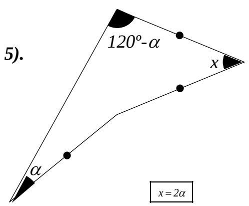
$x=2\alpha$

4).



$x=120º-\alpha$

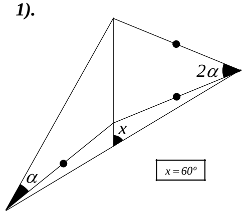
5).



$x=2\alpha$

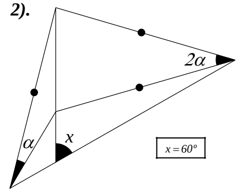
CONSECUENCIAS

1).



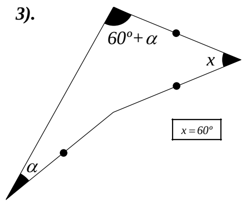
$x=60º$

2).



$x=60º$

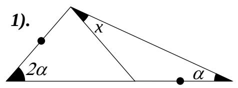
3).



$x=60º$

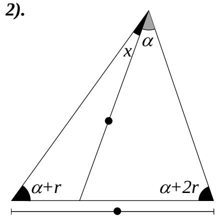
PROPIEDADES ESPECIALES

1).



$x=\alpha$

2).



$x=r$

EL GROVEROSO

CAPÍTULO VI

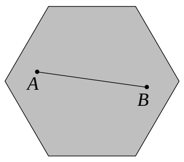
POLIGONOS

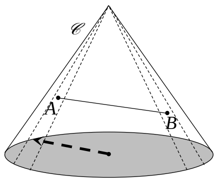
INTRODUCCIÓN

CONJUNTOS CONVEXOS Y NO CONVEXOS

CONJUNTOS CONVEXOS

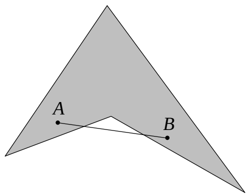
En las figuras $A \in \mathscr{C}$; $B \in \mathscr{C}$ y $\overline{AB} \subset \mathscr{C}$, entonces $\mathscr{C}$ es un conjunto convexo.

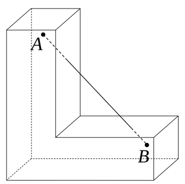




CONJUNTOS NO CONVEXOS

En las figuras $A \in \mathscr{C}$; $B \in \mathscr{C}$ y $\overline{AB} \not\subset \mathscr{C}$, entonces $\mathscr{C}$ es un conjunto no convexo.

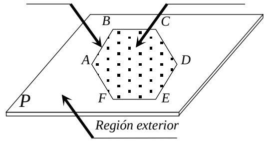




DEFINICIÓN

El polígono divide al plano **P** en tres subconjuntos de puntos.

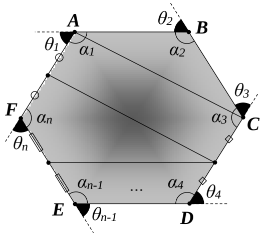
- Puntos interiores al polígono.
- Puntos exteriores al polígono.
- Puntos de la frontera del políg.



Notación

Polígono ABCDEF.

ELEMENTOS



Vértices: $A, B, C, ..., F$

Lados: $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \cdots$

Ángulos interiores:

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots$

Ángulos exteriores:

$\theta_1, \theta_2, \theta_3, \cdots$

Diagonales: $\overline{AC}, \overline{AD}, \overline{AE}, \cdots$

Diagonales medias:

$\overline{MN}, \overline{MP}, \overline{MQ}, \cdots$

Perímetro :

$2p = AB + BC + CD + \cdots$

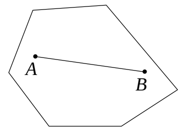
Diagonal:
Es el segmento cuyos extremos son dos vértices no consecutivos.

Diagonal media:
Es el segmento que cuyos extremos son los puntos medios de los lados.

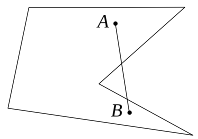
CLASIFICACIÓN

2. SEGUN LA REGIÓN QUE LIMITAN

a). Polígono convexo

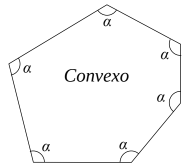


b). Polígono no convexo



3. SEGÚN MEDIDA

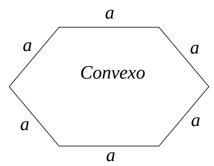
a). Polígono equiángulo

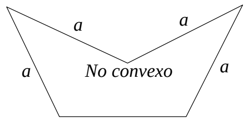


OBS.

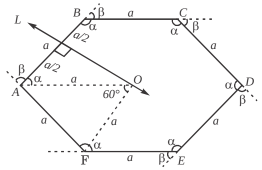
No existen los polígonos equiángulos no convexos

b). Polígono equilátero





b). Polígono Regular



1. SEGÚN EL NÚMERO DE LADOS.

N° de Lados	Nombre
3 Lados	Triángulo
4 Lados	Cuadrilátero
5 Lados	Pentágono
6 Lados	Exágono
7 Lados	Heptágono
8 Lados	Octógono
9 Lados	Nonágono o Eneágono
10 Lados	Decágono
11 Lados	Endecágono
12 Lados	Dodecágono
15 Lados	Pentadecágono
20 Lados	Icoságono

Teorema 11.
El número total de diagonales trazadas desde los vértices no consecutivos en un polígono de "n" lados cuyo número de lados es par (D^p) e impar (D^i) es:

$$D^p = \frac{n(3n-10)}{8}$$

$$D^i = \frac{3(n-1)(n-3)}{8}$$

Teorema 12.
El número de diagonales medias totales trazadas desde los puntos medios no consecutivos en un polígono cuyo número de lados es "k", siendo k un número par e impar es:

$$DM^p = \frac{k(3k-2)}{8}$$

$$DM^i = \frac{(k-1)(3k-1)}{8}$$

TEOREMAS

1. Para polígonos de "n" lados se cumple:

$$n = \#L = \#V = \#\measuredangle int. = \#\measuredangle ext. = \#\measuredangle cent.$$

2. Suma de las medidas de los ángulos interiores.

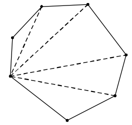
$$S_{\measuredangle int.} = 180^o(n-2)$$

3. Suma de las medidas de los ángulos interiores.

$$S_{\measuredangle ext.} = 360^o$$

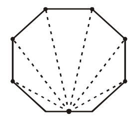
4. Número de triángulos.

Teorema 01
Si en un polígono de "n" lados se trazan todas las diagonales desde un vértice el polígono queda dividido en (n–2) triángulos.



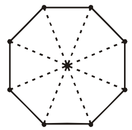
$$\#Triangulos = n-2$$

Teorema 02
Si desde uno de los lados se trazan segmentos hacia todos los vértices, el polígono de "n" lados queda dividido en (n–1) triángulos.



$$\#Triangulos = n-1$$

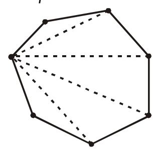
Teorema 03
Si un punto de la región interior, se une mediante segmentos de recta con todos los vértices del polígono de "n" lados se obtiene "n" triángulos.



$$\#Triangulos = n$$

5. Número de Diagonales.

Teorema 04.
En todo polígono de "n" lados el número de diagonales que se pueden trazar desde un vértice, está dado por:

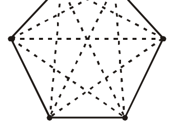


$$D_{IV} = n-3$$

Teorema 05. (#D. Parciales)
El Número de Diagonales, trazadas desde "k" vértices consecutivos, está dado por:

$$D_k = nk - \frac{(k+1)(k+2)}{2}; \forall (k < n)$$

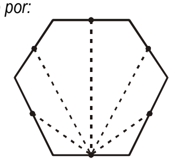
Teorema 06
El Número Total de Diagonales, trazadas desde "k" vértices consecutivos, está dado por:



$$D = \frac{n(n-3)}{2}$$

6. Número de diagonales medias.

Teorema 07
En todo polígono de "n" lados el número de diagonales medias que se pueden trazar desde un punto medio de un lado, está dado por:

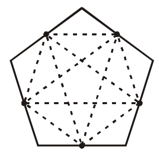


$$DM_{1L} = n-1$$

Teorema 08
El número de diagonales medias trazadas desde "k" lados consecutivos (**Diagonales medias parciales**), está dado por:

$$DM_k = nk - \frac{k(k+1)}{2}; \forall (k \leq n)$$

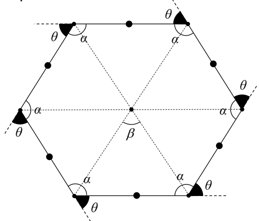
Teorema 09
En un polígono de "n" lados el número total de diagonales medias es:



$$DM = \frac{n(n-1)}{2}$$

7. Para polígonos regulares y equiángulos.

Teorema 10.
La medida de un ángulo interior, de un ángulo exterior y de un ángulo central de un polígono regular o equiángulo, está dado por:



$$1\measuredangle int. = \alpha = \frac{180^o(n-2)}{n}$$

$$1\measuredangle ext. = \theta = \frac{360^o}{n}$$

$$1\measuredangle cent. = \beta = \frac{360^o}{n}$$

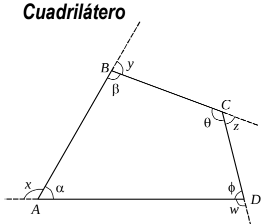
CAPITULO VII

GEOMETRÍA PLANA O PLANIMETRÍA

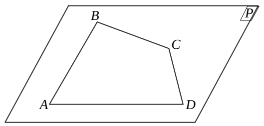
CUADRILÁTEROS O TETRÁGONOS

DEFINICIÓN

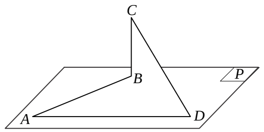
Cuadrilátero



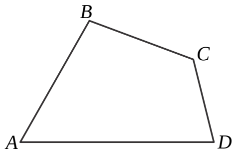
Cuadrilátero coplanario



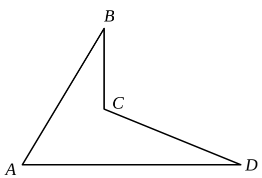
Cuadrilátero no coplanario



En este capítulo sólo estudiaremos a los cuadriláteros cuyos vértices son todos coplanarios, teniendo así a los cuadriláteros convexos (a) y no convexos (cóncavos) (b).



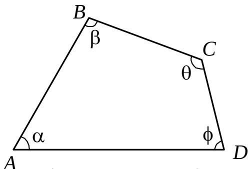
(a)



(b)

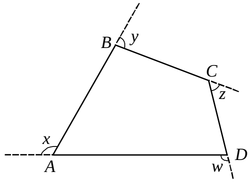
TEOR. FUNDAMENTALES

TEOREMA 01



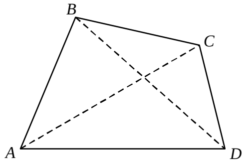
$$\boxed{\alpha+\beta+\theta+\phi=360^o}$$

TEOREMA 02



$$\boxed{x+y+z+w=360^o}$$

TEOREMA 03

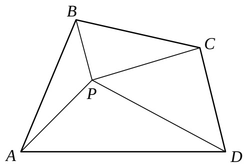


Si : $p=\dfrac{AB+BC+CD+AD}{2}$

Se cumple:

$$\boxed{p<AC+BD<2p}$$

TEOREMA 04



Si : $p=\dfrac{AB+BC+CD+AD}{2}$

Se cumple:

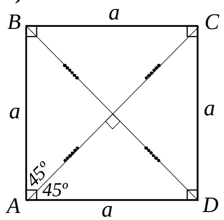
$$\boxed{p<AP+BP+CP+DP<3p}$$

CLASIFICACIÓN

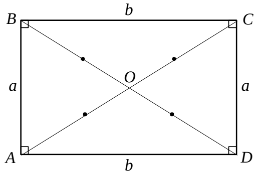
I. PARALELOGRAMOS

Aquellos cuadriláteros donde sus lados opuestos son paralelos.

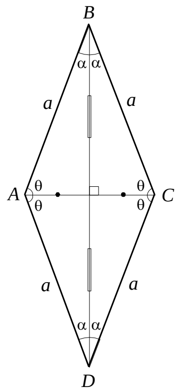
a). Cuadrado



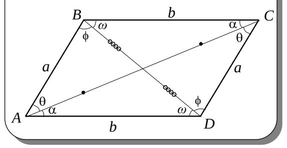
a). Rectángulo



a). Rombo

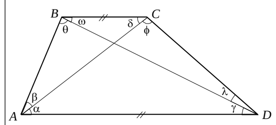


a). Romboide

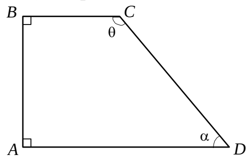


II. TRAPECIOS

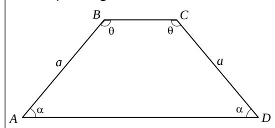
Son aquellos cuadriláteros que tienen un par de lados opuestos paralelos, llamados bases del trapecio.



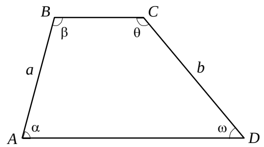
a). Trapecio Recto



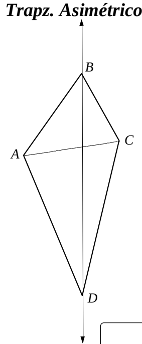
a). Trapecio Isósceles



a). Trapecio Escaleno

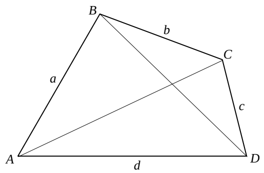


c). Trapz. Asimétrico

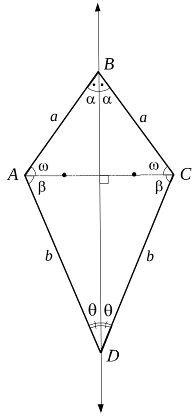


III. TRAPEZOIDES

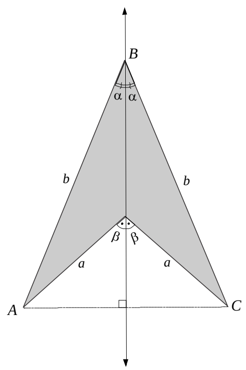
Aquel cuadrilátero que no presenta lados opuestos paralelos.



a). Trapz. Simétrico Convexo



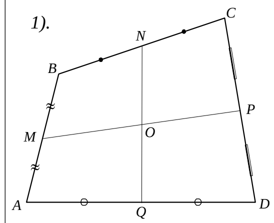
b). Trapz. Simétrico Cóncavo



PROPIEDADES

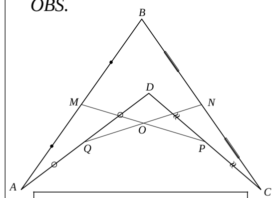
EN TODO CUADRILÁTERO

1).



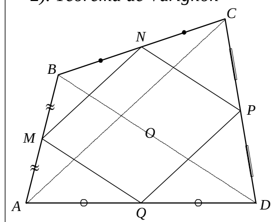
$$\boxed{OM=OP \quad \wedge \quad ON=OQ}$$

OBS.



$$\boxed{OM=OP \quad \wedge \quad ON=OQ}$$

2). Teorema de Varignon

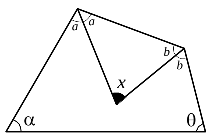


Se cumple:

MNPQ, es paralelogramo.

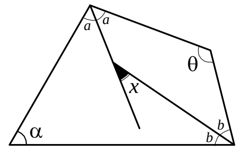
- $\boxed{MN+NP+PQ+QM=AC+BD}$
- $\boxed{2\left(A_{MNPQ}\right)=A_{ABDCD}}$
-

3). Teorema



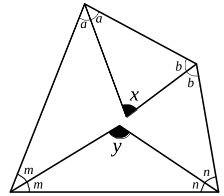
$$\boxed{x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}}$$

4). Teorema



$$\boxed{x=\dfrac{\theta-\alpha}{2}}$$

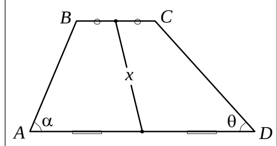
5). Teorema



$$\boxed{x+y=180^o}$$

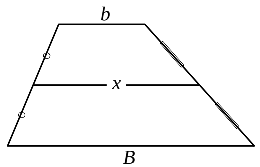
EN TODO TRAPECIO

1). Teorema



$$\boxed{x=\dfrac{AD-BC}{2}} \Leftrightarrow \alpha+\theta=90^o$$

2). Teorema



$$\boxed{x=\dfrac{B+b}{2}}$$

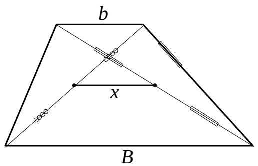
Continúa

CAPITULO VII

CUADRILÁTEROS O TETRÁGONOS

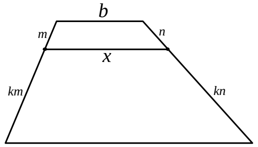
PROPIEDADES

3). Teorema



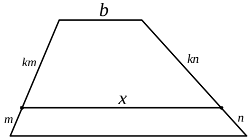
$$x = \frac{B-b}{2}$$

4). Teorema



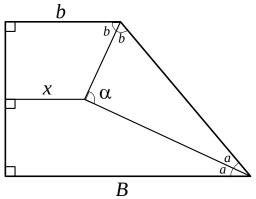
$$x = \frac{kb+B}{k+1}$$

5). Teorema



$$x = \frac{b+kB}{k+1}$$

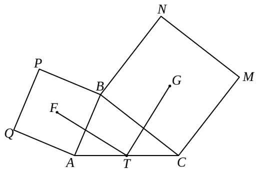
6). Teorema



$$x = \frac{a+b-c}{2} \quad \wedge \quad \alpha = 90º$$

7). Teorema

Sea ABPQ y BCMN cuadrados de centros F y G respectivamente y AT=TC.

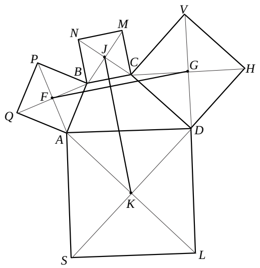


Se cumple:

$$FT = TG \quad \wedge \quad m\measuredangle FPG = 90º$$

8). Teorema

Sea ABPQ, BCMN, CDHV y ADLS cuadrados de centros F, J, G y K respectivamente.

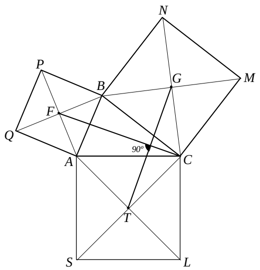


Se cumple:

$$FG = JK \quad \wedge \quad \overline{FG} \perp \overline{JK}$$

9). Teorema

Sea ABPQ, BCMN y ACLS cuadrados de centros F, G y T respectivamente.



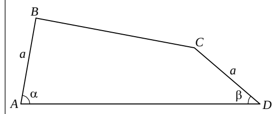
Se cumple:

$$FC = TG \quad \wedge \quad \overline{FC} \perp \overline{TG}$$

OBSERVACIÓN

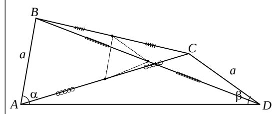
CUADRILÁTRO EQUILÁTERO

Un cuadrilátero ABCD, es equilátero si AB = CD y $\alpha+\beta$ = 120º (Denominado por Jack Garfunkel, por los teoremas que en él se cumplen).

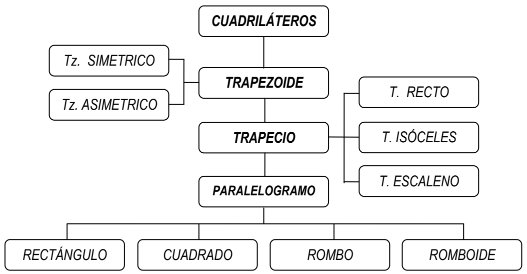


Teorema:

Los puntos medios de las diagonales y del lado BC son los vértices de un triángulo equilátero.



JERARQUIA DE LOS CUADRILATEROS



CAPITULO VIII

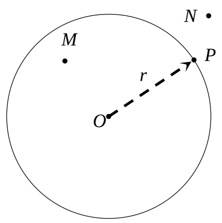
GEOMETRÍA PLANA O PLANIMETRÍA

CIRCUNFERENCIA

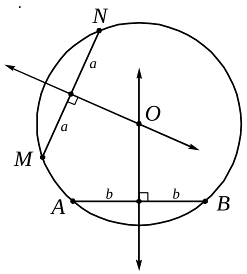
DEFINICIÓN

CIRCUNFERENCIA

Es el lugar geométrico de puntos coplanarias que equidistan de un punto fijo en el plano. El punto dado se llama centro y la distancia es el radio.



- "M", es un punto interior a la circunferencia.
  $OM < OP$
- "N", es un punto exterior a la circunferencia.
  $ON > OP$
- "P", es un punto aferente a la circunferencia.
  $OP = r$



Toda circunferencia queda determinada como mínimo por 3 puntos no colineales.

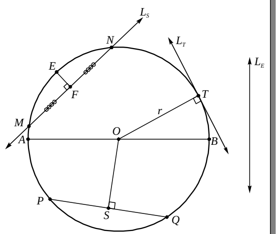
El centro de una circunferencia queda determinado por la intersección de las mediatrices de dos de sus cuerdas.

$$\pi = \frac{L_o}{D} = 3{,}14159\cdots$$

$$L_o = 2\pi r$$

TEOR. FUNDAMENTALES

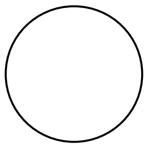
LÍNEAS RELACIONADOSCON LA CIRCUNFERENCIA



1. Cuerda: $\overline{PQ}$
2. Diámetro: $\overline{AB}$
3. Arco: $\overset{\frown}{MN}$
4. Flecha o sagita: $\overline{EF}$
5. Apotema: $\overline{OS}$
6. Recta tangente: $\overleftrightarrow{L_T}$
7. Recta secante: $\overleftrightarrow{L_S}$
8. Recta exterior: $\overleftrightarrow{L_e}$

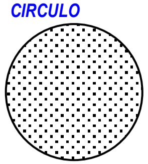
OBSERVACIÓN

CIRCUNFERENCIA



Perimetro

CIRCULO



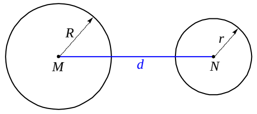
Perimetro
Area

ESFERA

Perimetro
Superficie
Volumen

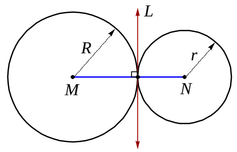
POSICIONES RELATIVAS DE DOS CIRCUNFERENCIAS

7. C. EXTERIORES



$$MN > R + r$$

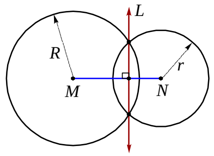
8. C. TANGENTES EXTERIORES



$$MN = R + r$$

$\overleftrightarrow{L}$: Recta tangente común interior

9. C. SECANTES

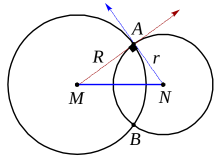


$$MN = R + r$$

$\overleftrightarrow{L}$: Secante común $\left(\overleftrightarrow{L} \perp \overline{MN}\right)$

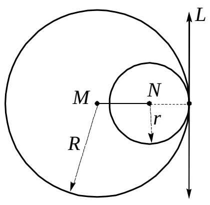
OBSERVACIÓN

Las circunferencias mostradas a continuación se denominan **circunferencias ortogonales**, se observa que los radios y son perpendiculares.



$$(MN)^2 = R^2 + r^2$$

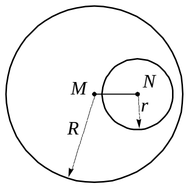
4. C. TANGENTES INTERIORES



$$MN = R - r$$

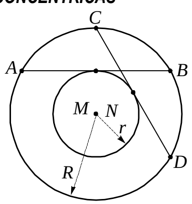
$\overleftrightarrow{L}$: Recta tangente común

5. C. INTERIORES



$$MN < R - r$$

6. C. CONCÉNTRICAS



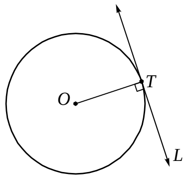
$$MN = 0 \;\wedge\; AB = CD$$

" … Cualquiera puede simpatizar con las penas de un amigo; simpatizar con sus éxitos requiere una naturaleza delicadísima…"

EL GROVEROSO

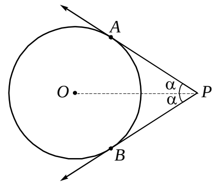
TEOREMAS GENERALES

1.



$$\overline{OT} \perp \overleftrightarrow{L}$$

2.

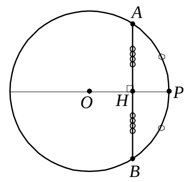


$$AP = BP$$

NOTA

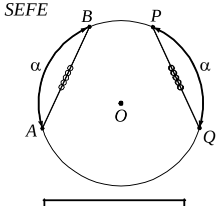
Si "O" es centro, $\overline{OP}$: es bisectriz del ángulo APB.

3.



$$AH = BH$$
$$AP = BP$$

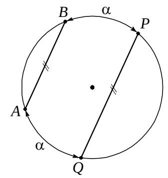
4. SEFE



Si $AB = PQ$

$\Rightarrow \overset{\frown}{AB} \cong \overset{\frown}{PQ}$

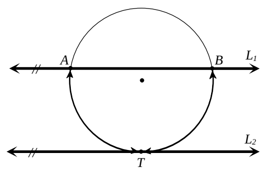
5.



Si $\overline{AB} \,//\, \overline{PQ}$

$\Rightarrow \overset{\frown}{AQ} \cong \overset{\frown}{BP}$

OBS.

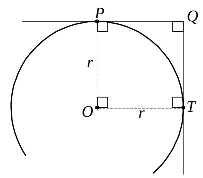


Si $\overleftrightarrow{L_1} \,//\, \overleftrightarrow{L_2}$

$\Rightarrow \overset{\frown}{AT} \cong \overset{\frown}{TB}$

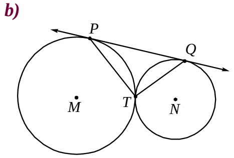
OBSERVACIÓN

a)



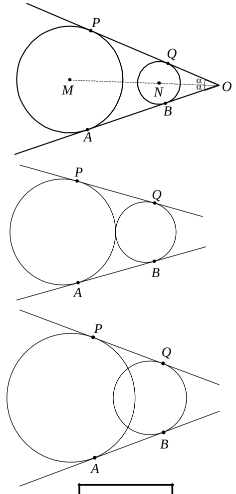
$\square OPQT$: Cuadrado

b)



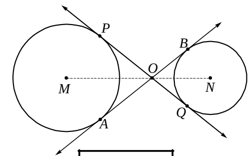
$m\measuredangle PTQ = 90^o$

c) Rectas tangentes exteriores comunes a dos circunferencias.



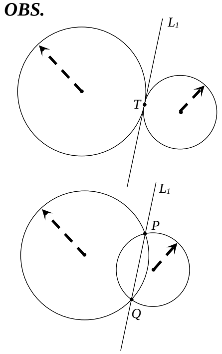
$$AB = PQ$$

d) Rectas tangentes interiores comunes a dos circunferencias.



$$AB = PQ$$

OBS.



CAPÍTULO IX

GEOMETRÍA PLANA O PLANIMETRÍA

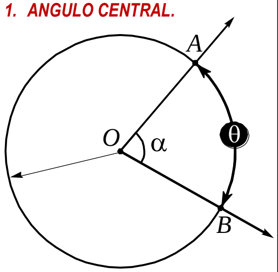
CIRCUNFERENCIAS

ÁNGULOS ASOCIADOS A LA CIRCUNFERENCIA

OBSERVACIÓN

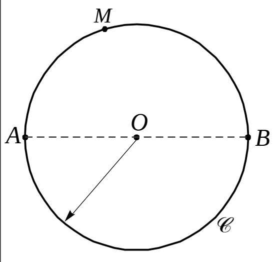
A veces es conveniente considerar a la circunferencia común arco, aunque no tenga extremos. En este caso se considera su medida 360º.

1. ANGULO CENTRAL.



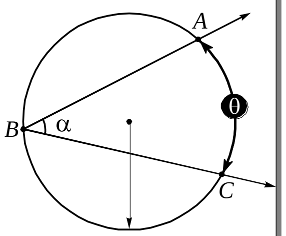
$\alpha = \theta$

OBSERVACIÓN



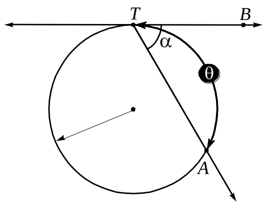
$mAMB = 180º$

2. ANGULO INSCRITO.



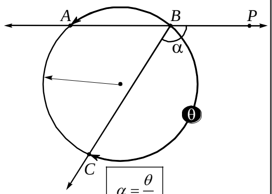
$\alpha = \frac{\theta}{2}$

3. ÁNGULO SEMIINSCRITO



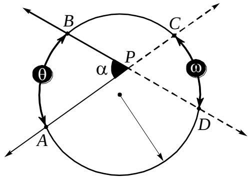
$\alpha = \frac{\theta}{2}$

4. ANGULO EXINSCRITO.



$\alpha = \frac{\theta}{2}$

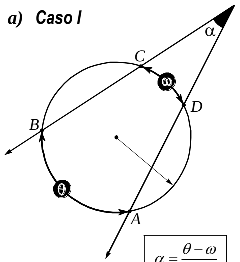
5. ANGULO INTERIOR.



$\alpha = \frac{\theta + \omega}{2}$

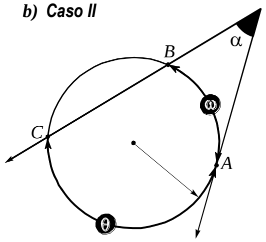
6. ANGULO EXTERIOR.

a) Caso I



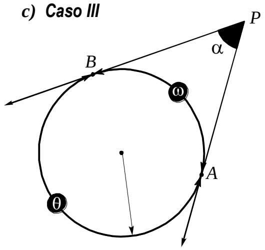
$\alpha = \frac{\theta - \omega}{2}$

b) Caso II



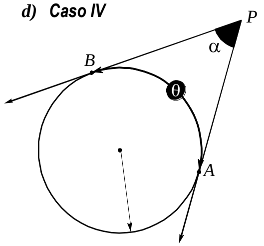
$\alpha = \frac{\theta - \omega}{2}$

c) Caso III

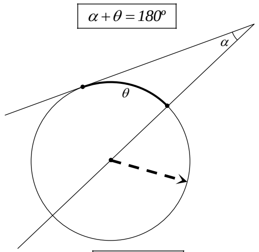


$\alpha = \frac{\theta - \omega}{2}$

d) Caso IV



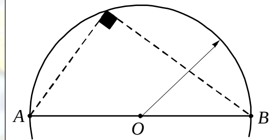
$\alpha + \theta = 180º$



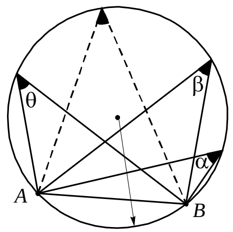
$\alpha + \theta = 90º$

TEOREMAS ADICIONALES

1. *Un ángulo cualquiera inscrito en una semi circunferencia es un ángulo recto.*

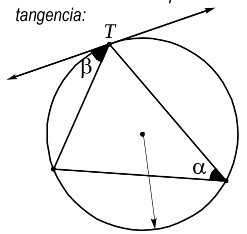


2. *Todos los ángulos inscritos en el mismo arco son congruentes.*



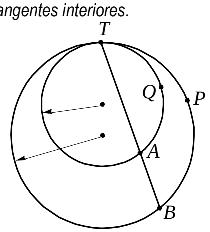
$\alpha = \beta = \cdots = \theta$

3. *Si "T" es un punto de tangencia:*



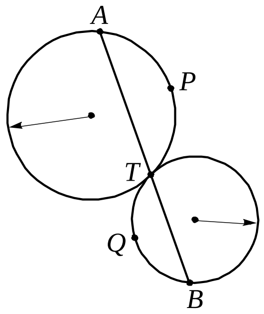
$\alpha = \beta$

4. *Para dos circunferencias tangentes interiores.*



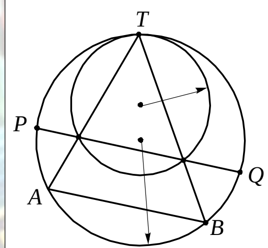
$mTPB = mTQA$

5. *Para dos circunferencias tangentes exteriores.*



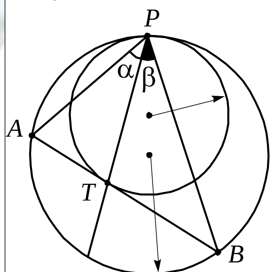
$mAPT = mTQB$

6. *Si "T" es punto de tangencia.*



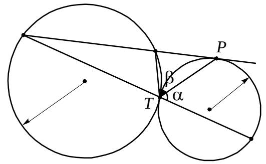
$\overline{AB} // \overline{PQ}$

7. *Si "P" y "T" son puntos de tangencia.*



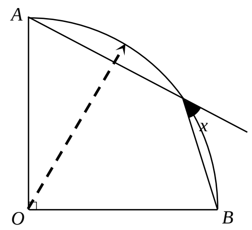
$\alpha = \beta$

8. *Si "P" y "T" son puntos de tangencia.*



$\alpha = \beta$

9. *Si AB es un cuadrante se cumple:*

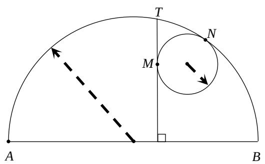


$x = 45º$

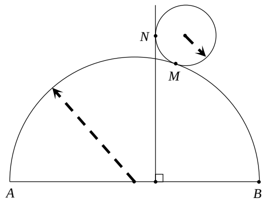
10.

M, N: Puntos de tangencia
Entonces:

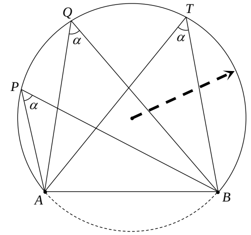
a). A, M y N son colineales.



b). B, M y N son colineales.



ARCO CAPAZ



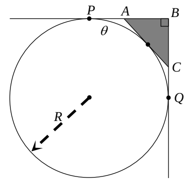
$$m\measuredangle APB = m\measuredangle AQB = \cdots = \frac{AB}{2}$$

APB : Arco capaz

$\overline{AB}$*: Segmento capaz*

PROPIEDAD

Si "p" es el semiperímetro del ΔABC *(Recto en "B"), se cumple*



$R = p$

" … Estoy convencido de que en un principio Dios hizo un mundo distinto para cada hombre, y que es en ese mundo, que está dentro de nosotros mismos, donde deberíamos intentar vivir.…"

O. WILDE

"EL GROVEROSO"

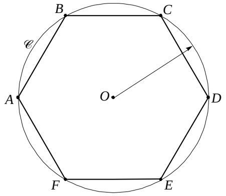
CAPITULO X

GEOMETRÍA PLANA O PLANIMETRÍA

POLIGONOS INSCRITOS, CIRCUNSCRITOS E EXINSCRITOS

POLIGONO INSCRITO

I. POLÍGONO INSCRITO

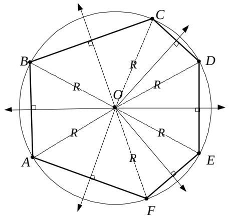


A, B, C, D, E y F pertenecen a la circunferencia $\mathscr{C}$.
Entonces:

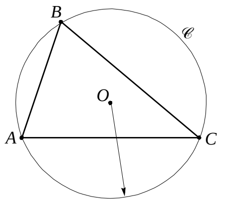
- El polígono ABCDEF está inscrito en $\mathscr{C}$.
- La circunferencia $\mathscr{C}$, se llama circunferencia circunscrita al polígono ABCDEF.

PROPIEDADES

- $OA = OB = OC = OD = OE = OF$
- Las mediatrices de todos los lados del polígono inscrito concurren en el centro de la circunferencia.

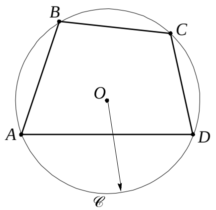


TRIÁNGULO INMSCRITO



- Triángulo ABC inscrito en $\mathscr{C}$.
- Circunferencia circunscrita al triángulo ABC.

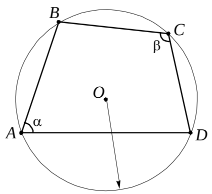
CUADRILÁTERO INSCRITO



- Cuadrilátero ABCD inscrito en $\mathscr{C}$.
- Circunferencia circunscrita al cuadrilátero ABCD.

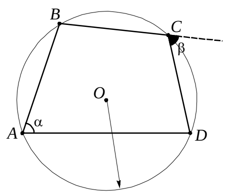
TEOREMAS

TEOREMA 01



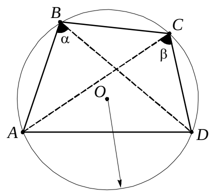
$\alpha + \beta = 180^o$

TEOREMA 02



$\alpha = \beta$

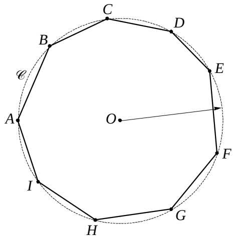
TEOREMA 03



$\alpha = \beta$

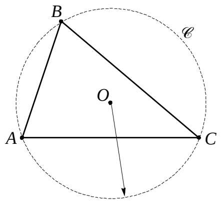
CLASIFICACIÓN

POLIGONO INSCRIPTIBLE



A, B, C, D, E,..., pertenecen a $\mathscr{C}$
Políg. ABCDEFGHI es inscriptible

TRIÁNGULO INSCRIPTIBLE



ΔABC, es inscriptible

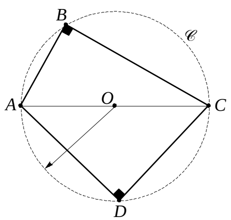
Todo triángulo es inscriptible

CUADRILÁTERO INSCRIPTIBLE

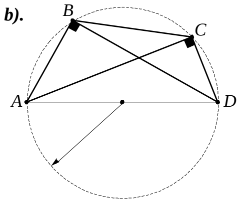
Aquel que se puede inscribir en una circunferencia, para que esto suceda dicho cuadrilátero deberá cumplir cualquiera de las teoremas que se cumplen en el cuadrilátero inscrito.

Ejemplos
(Cuadriláteros inscriptibles más frecuentes)

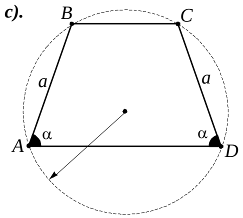
a).



b).

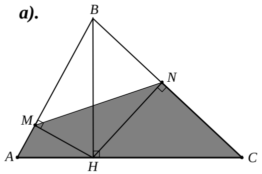


c).



TEOREMAS DE TAYLOR

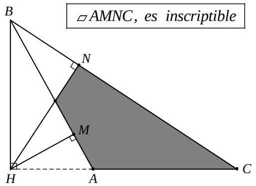
a).



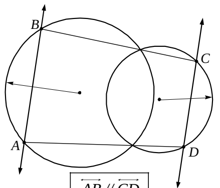
$\square AMNC$, es inscriptible

b).

$\square AMNC$, es inscriptible

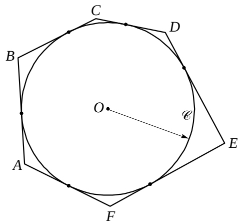


TEOREMA



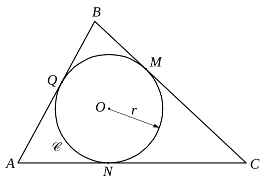
$\overleftrightarrow{AB} \,//\, \overleftrightarrow{CD}$

II. POLIGONO CIRCUNSCRITO



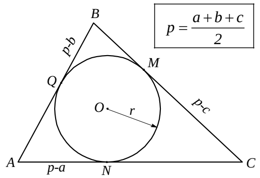
$\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DE}, \overline{EF}, \overline{FA}$, tangentes a la circunferencia $\mathscr{C}$.

TRIÁNGULO CIRCUNSCRITO



ΔABC, circunscrito a C

TEOREMA

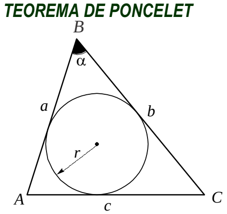


$p = \dfrac{a+b+c}{2}$

Si $AB = c$, $BC = a$ y $AC = b$
Entonces se cumple:

$AN = p - a;\quad BQ = p - a;\quad CM = p - a$

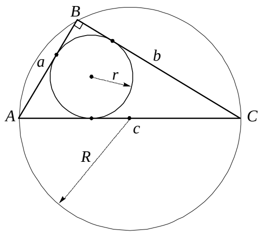
TEOREMA DE PONCELET



$a + b = c + 2r \cdot Cotan\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$

PROPIEDADES

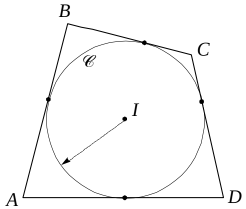
Caso Particular



$a + b = c + 2r$

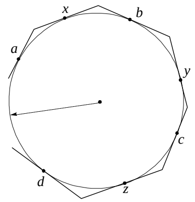
$a + b = 2(R + r)$

CUADRILÁTERO CIRCUNSCRITO



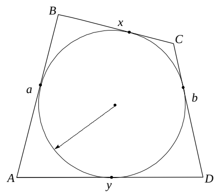
$\square ABCD$, circunscrito a C

TEOREMA DE PITOT



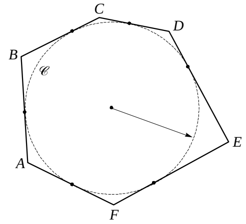
$a + b + c + \cdots = x + y + z + \cdots$

Caso Particular



$a + b = x + y$

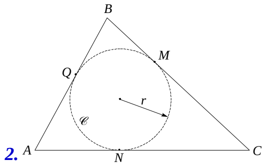
POLÍGONO CIRCUNSCRIPTIBLE



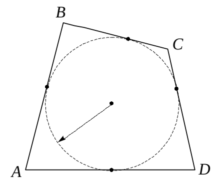
Políg. ABCD... es circunscriptible

TEOREMA

1. Todo triángulo es circunscriptible



2.



Si $\square$ $AB + CD = BC + AD$

$\Rightarrow$ ABCD es circunscriptible

3. Si las bisectrices interiores de un polígono son concurrentes, dicho polígono es circunscriptible.

"…El mundo llama inmorales a los libros que le explican su propia vergüenza.…"

O. WILDE

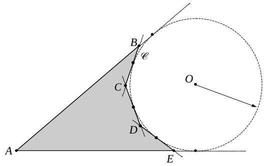
"EL GROVEROSO"

CAPÍTULO X

POLIGONOS INSC., CIRCUNSC. Y EXINSCRITOS

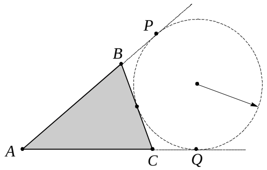
POLIGONO EXINSCRITO

I. POLÍGONO EXINSCRITO



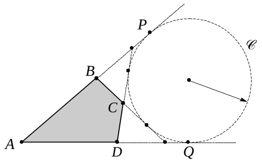
El polígono $ABCDE$ es exinscrito a $\mathscr{C}$ y viceversa.

TRIÁNGULO EXINSCRITO



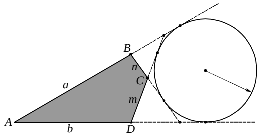
$$\boxed{AP = AQ = \frac{AB + BC + AC}{2}}$$

CUADRILÁTERO EXINSCRITO



Cuadrilátero $ABCD$ ex insxrito a $\mathscr{C}$.

TEOREMA DE STEINER



$$\boxed{AB - CD = AD - BC}$$

"… Hablan mucho de la belleza de la certidumbre como si ignorasen la belleza sutil de la duda. Creer es muy monótono; la duda es apasionante…"

O. WILDE

EL GROVEROSO

CAPITULO XI

GEOMETRÍA PLANA O PLANIMETRÍA

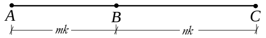
PROPORCIONALIDAD DE SEGMENTOS

INTRODUCCIÓN

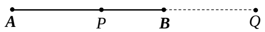
PROPORCIÓN DE SEGMENTOS

La proporción $\frac{AB}{BC}=\frac{m}{n}$,

Gráficamente representaría:

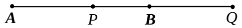


OBSERVACIÓN



Dado el segmento $\overline{AB}$, se dice que "P" divide internamente a $\overline{AB}$ en razón de $\frac{PA}{PB}$ y "Q" divide externamente a $\overline{AB}$ en razón de $\frac{QA}{QB}$.

CUATERNA ARMÓNICA

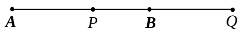


Si A, B, C y D están en una recta y constituyen una cuaterna armónica, cumplen la siguiente relación.

$$\frac{AP}{PB}=\frac{AQ}{BQ}$$

P y Q son conjugados armónicos respecto de A y C.

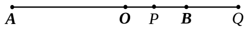
RELACIÓN DE DESCARTES



Si A, P, B y Q están en cuaterna armónica, cumple la siguiente relación.

$$\frac{1}{AP}+\frac{1}{AQ}=\frac{2}{AB}$$

RELACIÓN DE NEWTON

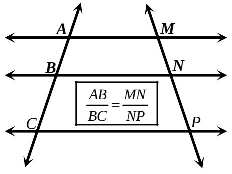


Si A, P, B y Q están en cuaterna armónica y $AO=OQ$ cumple la siguiente relación.

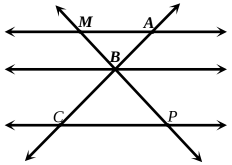
$$(AO)^2=(OP)(OQ)$$

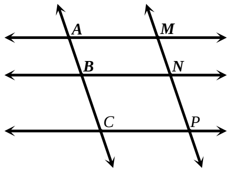
PRINCIPALES TEOREMAS DE PROPORCIONALIDAD DE SEGMENTOS ASOCIADOS AL TRIÁNGULO

I. TEOREMA DE THALES

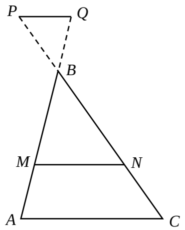


$$\frac{AB}{BC}=\frac{MN}{NP}$$



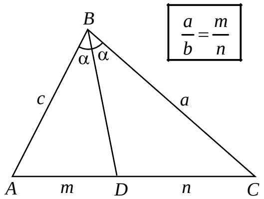


COROLARIO



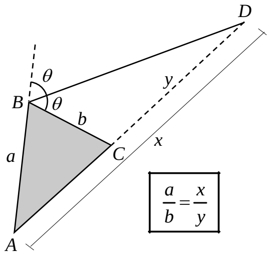
$$\frac{BM}{MA}=\frac{BN}{NC}=\frac{PB}{BC}=\frac{QB}{BA}$$

II. TEOREMA DE LA BISECTRIZ INTERIOR



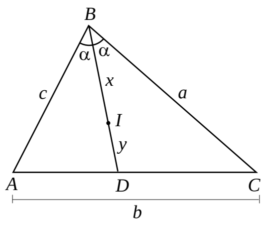
$$\frac{a}{b}=\frac{m}{n}$$

III. TEOREMA DE LA BISECTRIZ EXTERIOR



$$\frac{a}{b}=\frac{x}{y}$$

IV. TEOREMA DEL INCENTRO



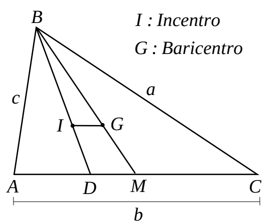
$$\frac{x}{y}=\frac{a+c}{b}$$

$$AB+BC>AC \Rightarrow BI>ID$$

V. TEOREMA DEL INCENTRO Y BARICENTRO

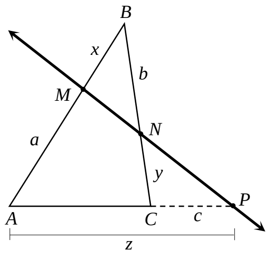
I : Incentro

G : Baricentro



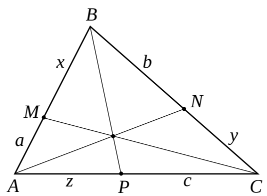
$$\text{Si } \overline{IG}\,//\,\overline{AC} \Rightarrow b=\frac{a+c}{2}$$

VI. TEOREMA DE MENELAO



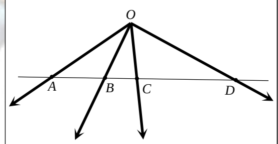
$$\frac{abc}{xyz}=1$$

VII. TEOREMA DE CEVA



$$\frac{abc}{xyz}=1$$

HAZ ARMÓNICO

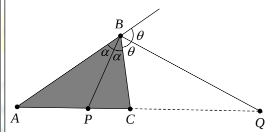


- $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$: Rayos
- Si $\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{CD}$

Entonces $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$ Forman un Haz Armónico.

- "O" : Centro del Haz
- Las rectas $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OD}$ son conjugados armónicos respecto de las rectas $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OC}$ y viceversa.

COROLARIO



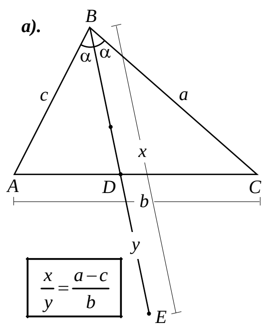
- $\overline{BQ}$: bis. exterior del ΔABC
- $\overline{BP}$: bis. interior del ΔABC

Entonces A, P, C y Q Forman cuaterna armónica, esto ocurrirá si y sólo si:

$$\frac{AP}{PC}=\frac{AQ}{CQ}$$

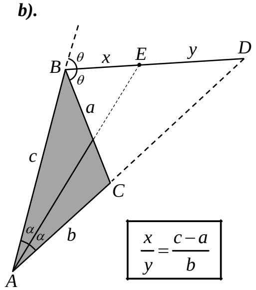
VIII. TEOREMA DEL EXCENTRO

a).



$$\frac{x}{y}=\frac{a-c}{b}$$

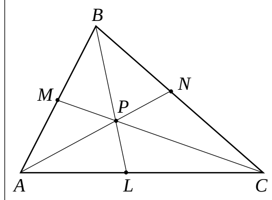
b).



$$\frac{x}{y}=\frac{c-a}{b}$$

E: Excentro

IX. TEOREMA DE VAN AUBEL



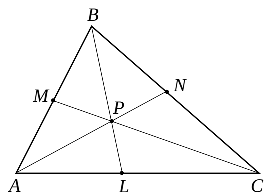
$\overline{AN}, \overline{BL}, \overline{CM}$: Cevianas

$\overline{AN}\cap\overline{BL}\cap\overline{CM}=P$

Para $\overline{BL}$ se cumple:

$$\frac{BP}{PL}=\frac{BM}{MA}+\frac{BN}{NC}$$

X. TEOREMA DE GERGONNE



$\overline{AN}, \overline{BL}, \overline{CM}$: Cevianas

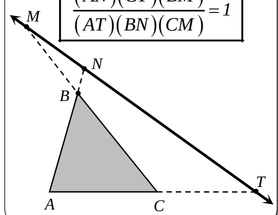
$\overline{AN}\cap\overline{BL}\cap\overline{CM}=P$

$$\frac{NP}{AN}+\frac{LP}{BL}+\frac{MP}{CM}=1$$

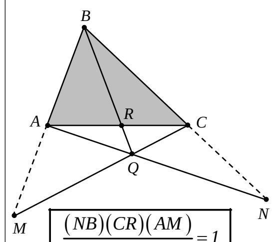
XI. TEOREMA DE MENELAO (Segundo Caso)

$\overline{MT}$: Secante a la prolongación de los lados del ΔABC :

$$\frac{(AN)(CT)(BM)}{(AT)(BN)(CM)}=1$$

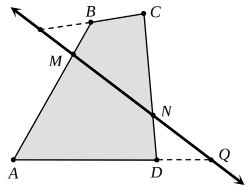


XII. TEOREMA DE CEVA (Segundo Caso)



$$\frac{(NB)(CR)(AM)}{(NC)(AR)(MB)}=1$$

TEOREMA

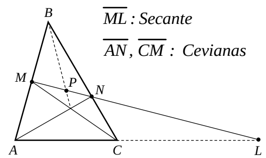


$$\frac{(AM)(PB)(CN)(DQ)}{(MB)(PC)(ND)(AQ)}=1$$

TEOREMA

$\overline{ML}$: Secante

$\overline{AN}$, $\overline{CM}$: Cevianas



$\Rightarrow M,P,N,L$: puntos armonicos

$$\therefore \frac{MP}{PN}=\frac{ML}{NL}$$

"...Mientras que para la sociedad no existe mayor pecado que la vida contemplativa, los más cultos opinan que la contemplación es la ocupación natural del hombre....."

O. WILDE

EL GROVEROSO

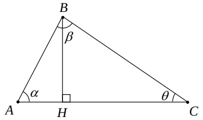
CAPITULO XII

GEOMETRÍA PLANA O PLANIMETRÍA

SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

DEFINICIÓN

Dados los triángulos ABC y MNP.



Lados homólogos proporcionales

$$\frac{AB}{MN}=\frac{BC}{NP}=\frac{AC}{MP}=\frac{BH}{NS}=\dots=k$$

k= Cte. de proporcionalidad

Ángulos correspondientes

$m\measuredangle A=m\measuredangle M=\alpha$

$m\measuredangle B=m\measuredangle N=\beta$

$m\measuredangle C=m\measuredangle P=\theta$

Por tanto:

$\boxed{\Delta ABC\sim\Delta MNP}$

OBSERVACIÓN

Dos triángulos son semejantes cuando existe una transformación o producto de transformaciones (Transformaciones geométricas), que al aplicarse a uno de ellos, la transformación resulta congruente a la otra.

"Es peligroso escuchar. Se corre el riesgo de que le convenzan; y un hombre que permite que le convenzan con una razón, es un ser absolutamente irracional…"

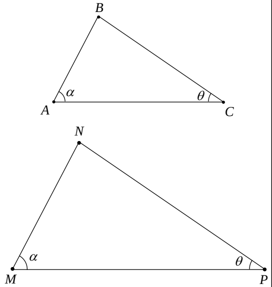
O. WILDE

EL GROVEROSO

CRITERIOS DE CONGRUENCIA

PRIMER TEOREMA

AA (Ángulo – Ángulo)



Si dos ángulos correspondientes son respectivamente congruentes.

$m\measuredangle A=m\measuredangle M=\alpha$

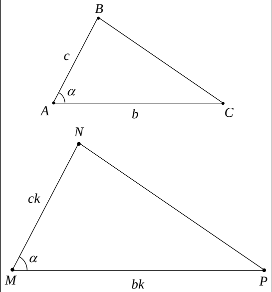
$m\measuredangle C=m\measuredangle P=\theta$

Entonces:

$\boxed{\Delta ABC\sim\Delta MNP}$

SEGUNDO TEOREMA

LAL (Lado – ángulo – lado)



Si tienen dos lados proporcionales:

$$\frac{MN}{AB}=\frac{MP}{AC}=k\quad ;$$

y congruentes los ángulos comprendidos:

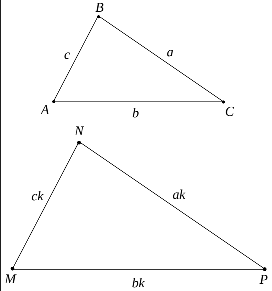
$m\measuredangle A=m\measuredangle M=\alpha$

Entonces:

$\boxed{\Delta ABC\sim\Delta MNP}$

TERCER TEOREMA

LLL (Lado – Lado – Lado)



Si tienen sus tres lados respectivamente proporcionales

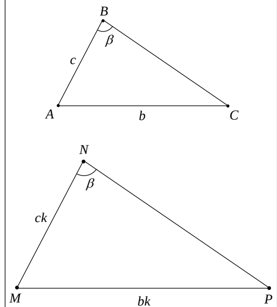
$$\frac{MN}{AB}=\frac{NP}{BC}=\frac{MP}{AC}=k\quad ;$$

Entonces:

$\boxed{\Delta ABC\sim\Delta MNP}$

CUARTO TEOREMA

ALL_m (Ángulo – Lado – Lado mayor)



Si tienen dos lados proporcionales:

$$\frac{MN}{AB}=\frac{MP}{AC}=k\quad ;$$

y congruentes los ángulos comprendidos:

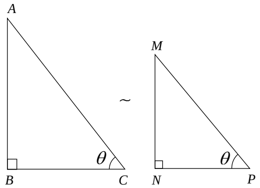
$m\measuredangle B=m\measuredangle N=\beta$

Entonces:

$\boxed{\Delta ABC\sim\Delta MNP}$

CONSECUENCIAS

1). En triángulos rectángulos

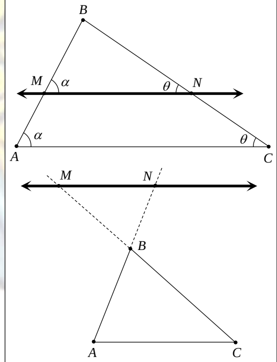


Si $m\measuredangle C=m\measuredangle P=\theta$

Entonces

$\boxed{\Delta ABC\sim\Delta MNP}$

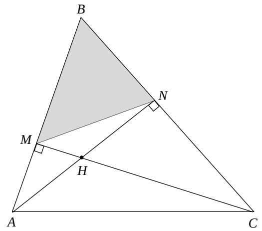
2). Sea $\overline{MN}\,//\,\overline{AC}$



Entonces

$\boxed{\Delta ABC\sim\Delta MNB}$

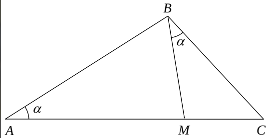
3). Sea $H:Ortocentro$



Entonces

$\boxed{\Delta ABC\sim\Delta MNB}$

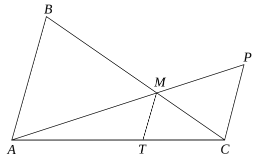
4). $\overline{BM}:Ceviana$



Entonces

$\boxed{(BC)^2=(AC)(MC)}$

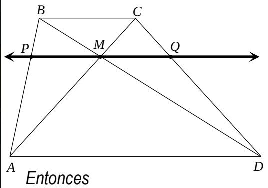
5). En la figura, $\overline{AB}\,//\,\overline{MT}\,//\,\overline{PC}$



Entonces

$$\boxed{MT=\frac{(AB)(PC)}{(AB)+(PC)}}$$

6). En el trapecio, $\overline{BC}\,//\,\overline{PQ}\,//\,\overline{AD}$

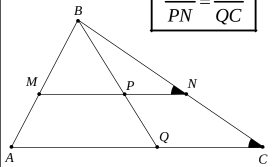


Entonces

$$\boxed{PM=MQ=\frac{(BC)(AD)}{(BC)+(AD)}}$$

7). En la figura, $\overline{MN}\,//\,\overline{AC}$

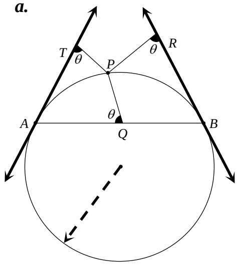
$$\boxed{\frac{MP}{PN}=\frac{AQ}{QC}}$$



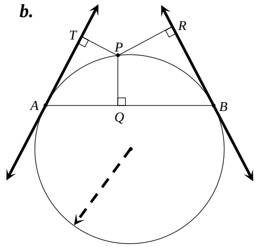
8). Teorema de Pappus.

A, B: Ptos. de tangencia

a.



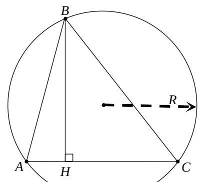
b.



Entonces

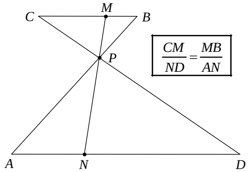
$\boxed{(PQ)^2=(TP)(PR)}$

9). En la figura, se cumple:



$\boxed{(AB)(BC)=2R(BH)}$

10). En la figura, $\overline{CB}\,//\,\overline{AD}$ **:**

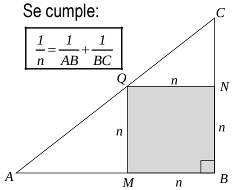


$$\boxed{\frac{CM}{ND}=\frac{MB}{AN}}$$

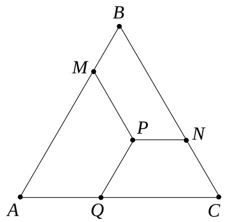
11). MBNQ, es un cuadrado:

Se cumple:

$$\boxed{\frac{1}{n}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{BC}}$$

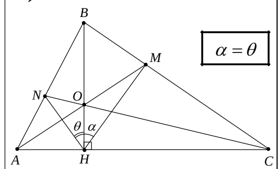


12). Teorema de Vuibert



$$\boxed{\frac{BN}{BC}+\frac{AM}{AB}+\frac{NC}{AC}=2}$$

13). Teorema de Blanchet

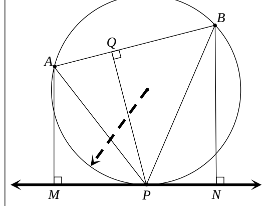


$\boxed{\alpha=\theta}$

$BH:Altura$

$AM,\ CN:Cevianas.$

14). Teorema



P, punto de tangencia.

$\boxed{(PQ)^2=(AM)(BN)}$

CAPITULO XIII

PUNTOS NOTABLES ASOCIADAS AL TRIÁNGULO

PRINCIPALES PUNTOS NOTABLES

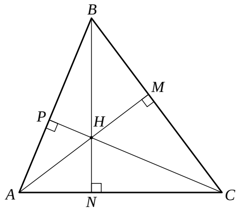
DEFINICIÓN

Son aquellos puntos donde concurren los llamados Líneas Notables

I. ORTOCENTRO (H)

Punto de intersección de las alturas de un triángulo.

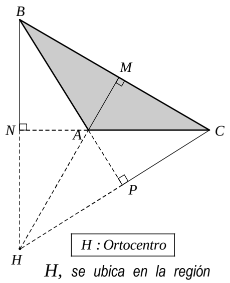
a). Triángulo acutángulo



H : Ortocentro

H, se ubica en la región interior del triángulo ABC.

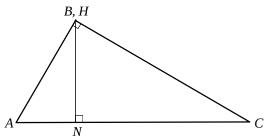
b). Triángulo obtusángulo



H : Ortocentro

H, se ubica en la región exterior del triángulo ABC.

c). Triángulo rectángulo

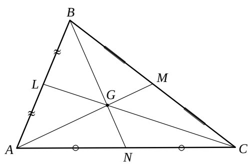


H : Ortocentro

H, se ubica en la frontera, es decir en el vértice del ángulo recto del triángulo ABC.

II. BARICENTRO (G)

Punto de intersección de las medianas de un triángulo.



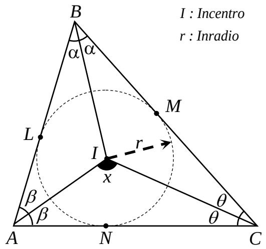
$$\left.\begin{array}{l} AG = 2(GM) \\ BG = 2(GN) \\ CG = 2(GL) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{GM}{AG} = \frac{GN}{BG} = \frac{GL}{CG} = \frac{1}{2}$$

III. INCENTRO (I)

El incentro es el centro de la circunferencia inscrita y equidista de los lados del triángulo.

I : Incentro

r : Inradio



M, N, L: Puntos de tangencia

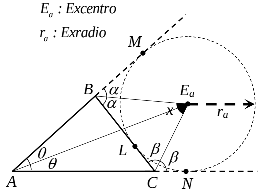
$$x = 90^\circ + \alpha$$

IV. EXCENTRO (E)

El incentro es el centro de la circunferencia inscrita y equidista de los lados del triángulo.

E_a : Excentro

r_a : Exradio



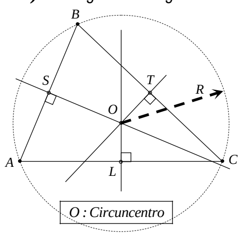
M, N, L: Puntos de tangencia

$$x = 90^\circ - \theta$$

V. CIRCUNCENTRO (O)

El circuncentro es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo y equidista de los vértices.

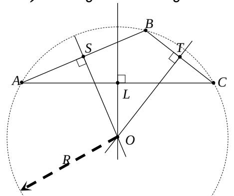
a). Triángulo acutángulo



O : Circuncentro

O, se ubica en la región interior del triángulo ABC.

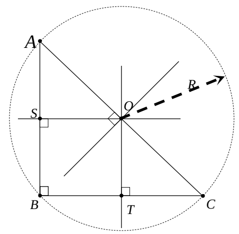
b). Triángulo obtusángulo



O : Circuncentro

O, se ubica en la región exterior del triángulo ABC.

c). Triángulo rectángulo

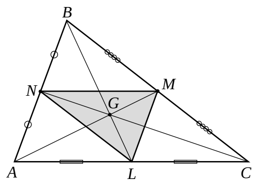


O : Circuncentro

O, se ubica en la frontera, es decir en el vértice del ángulo recto del triángulo ABC.

TRIÁNGULOS ESOECIALES ASOCIADOS A LOS PUNTOS NOTABLES

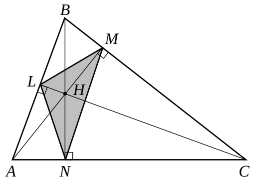
TRIÁNGULO MEDIANO O COMPLEMENTARIO



ΔMNL : Δ mediano del ΔABC.

G : Baricentro del ΔABC y ΔMNL

TRIÁNGULO ÓRTICO



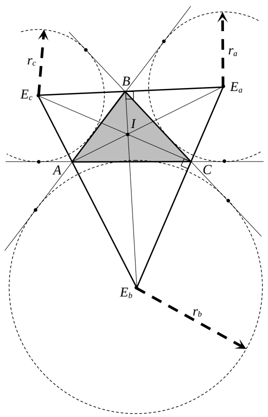
ΔMNL : Δ ortico del ΔABC.

H : Ortocentro del ΔABC

H : Incentro del ΔMNL

A, B, C : Excentros del ΔMNL

TRIÁNGULO EXINCENTRAL

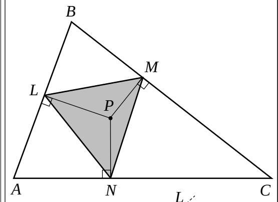


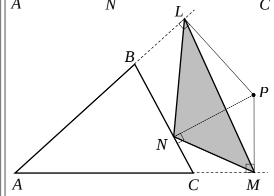
$\Delta E_aE_bE_c$: Δ exincentral del ΔABC.

I : Incentro del ΔABC

I : Ortocentro del $\Delta E_aE_bE_c$

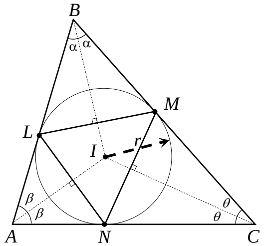
TRIÁNGULO PEDAL O PODAR





ΔMNL : Δ PEDAL del ΔABC.

TRIÁNGULO TANGENCIAL

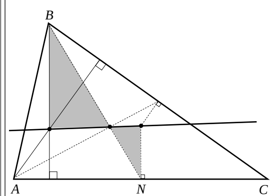


ΔMNL : Δ tangencial del ΔABC.

I : Incentro del ΔABC

I : Circuncentro del ΔMNL

LA RECTA DE EULER



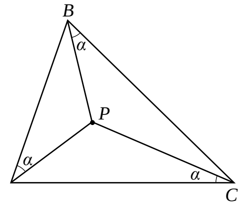
$\Delta BHG \cong \Delta NOG$

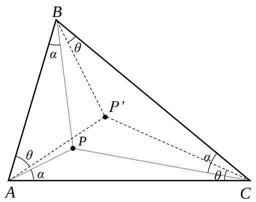
$$HG = 2(GO) \quad \wedge \quad HB = 2(ON)$$

H, G y O son colineales

$\therefore \ \overline{L}$: La Recta de Euler

EL PUNTO DE BROCARD (P)

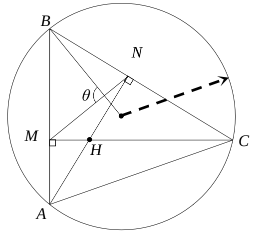


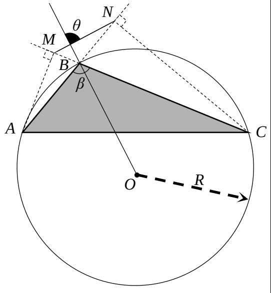


P y P' : Puntos de Brocard del ΔABC.

Todo triángulo no equilátero tiene dos puntos de Brocard.

TEOREMA DE NAGEL

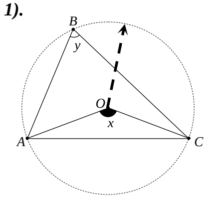


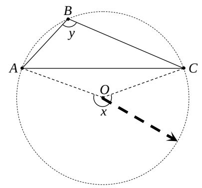


$$\theta = 90^\circ$$

PROPIEDADES

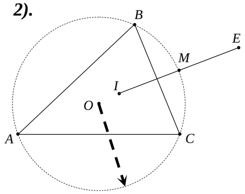
1).





$$x = 2y$$

2).



I : Incentro del ΔABC

E : Excentro del ΔABC, relativo al lado $\overline{BC}$.

$\mathscr{C}$: Circunferencia circunscrita al ΔABC.

$$IM = ME$$

INFÓRMESE

- Teorema de Carnot
- Teorema japonés
- Iceberg de los centros triangulares

"…Si nosotros somos tan dados a juzgar a los demás, es debido a que temblamos por nosotros mismos.…"

O. WILDE

EL GROVEROSO

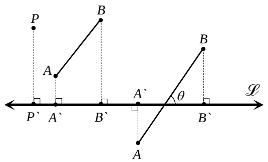
CAPITULO XIV

GEOMETRÍA PLANA O PLANIMETRÍA

RELACIONES MÉTRICAS EN ELTRIÁNGULO RECTÁNGULO

INTROCUCCIÓN

PROYECCIÓN ORTOGONAL



Teorema:

$$A`B` = (AB)Cos\theta$$

En la figura $\overline{PP`} \perp \mathscr{L}$ ( $P` \in \mathscr{L}$)

$P`$: Proy. Ortog. De P respecto a $\mathscr{L}$

$\overline{PP`}$: Proyectante de P respecto a $\mathscr{L}$

$\mathscr{L}$: Eje de proyección.

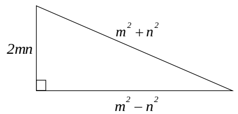
$\overline{A`B`}$: Proy. Ortog. de $\overline{AB}$ respecto a $\mathscr{L}$

$P`$: Proy. Ortog. De P respecto a L

$P`$: Proy. Ortog. De P respecto a L

TRIÁNGULOS PITAGÓRICOS

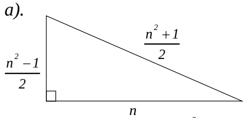
Son aquellos triángulos rectángulos donde las longitudes de sus lados son números enteros y positivos.



"m y n" son enteros positivos $(m > n)$.

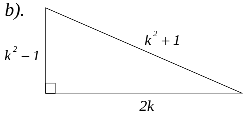
CASOS PARTICULARES

a).



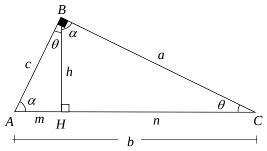
"n" impar y $n > 1$, $n < \frac{n^2-1}{2}$

b).



"k" par y $k > 2$, $2k < k^2 - 1$

TEOREMAS



En el $\triangle ABC$, se cumplen:

1. TEOREMA

Semejanza de triángulos rectángulos

$$\triangle AHB \sim \triangle BHC \sim \triangle ABC$$

2. TEOREMA

El cuadrado de la longitud de un cateto.

$$a^2 = b \cdot n$$

$$c^2 = b \cdot m$$

3. TEOREMA de Pitágoras.

$$b^2 = a^2 + c^2$$

4. TEOREMA

El cuadrado de la longitud de la altura relativa a la hipotenusa.

$$h^2 = m \cdot n$$

5. TEOREMA

El producto de las longitudes de los catetos.

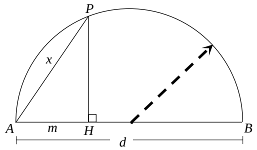
$$a \cdot c = b \cdot h$$

6. TEOREMA

Inversa del cuadrado de la longitud de la altura relativa a la hipotenusa.

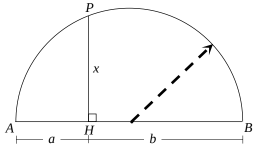
$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}$$

7. TEOREMA

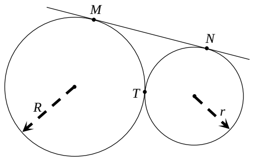


$$x^2 = d \cdot m$$

8. TEOREMA



9. TEOREMA

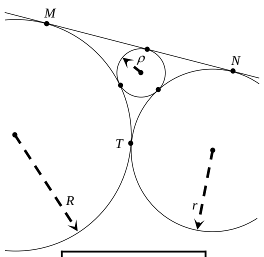


M,N y T son Ptos. de tangencia

$$\Rightarrow \quad MN = 2\sqrt{R \cdot r}$$

10. TEOREMA

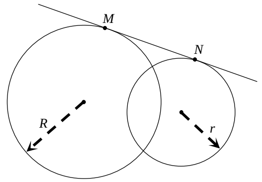
En la figura se cumple:



$$\frac{1}{\sqrt{\rho}} = \frac{1}{\sqrt{R}} + \frac{1}{\sqrt{r}}$$

11. TEOREMA

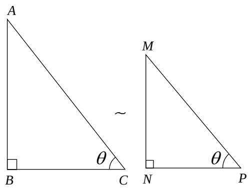
Para dos circunferencias ortogonales, se cumple:



$$MN = \sqrt{2 \cdot R \cdot r}$$

12. TEOREMA DE DOSTOR

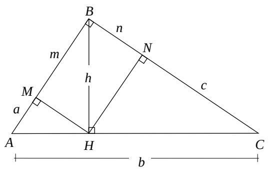
Dados dos triángulos rectángulos semejantes, se cumple:



$$(AC)(MP) = (BC)(NP) + (AB)(MN)$$

13. TEOREMA

En la figura, se cumple:



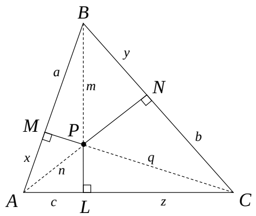
$$h^3 = a \cdot b \cdot c$$

$$h^3 = m \cdot b \cdot n$$

$$\left(\sqrt[3]{b}\right)^2 = \left(\sqrt[3]{a}\right)^2 + \left(\sqrt[3]{c}\right)^2$$

14) TEOREMA

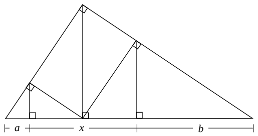
En la figura se cumple:



$$a^2 + b^2 + c^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

15) TEOREMA

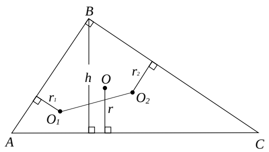
En la figura se cumple:



$$x = 2\sqrt{a \cdot b}$$

16) TEOREMA

En la figura se cumple:

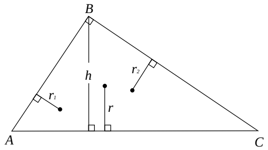


$$r^2 = r_1^2 + r_2^2$$

$$O_1O_2 = r\sqrt{2}$$

17) TEOREMA

En la figura se cumple:

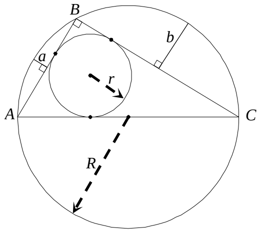


$$r(AC) = r_1(AB) + r_2(BC)$$

TEOREMAS DE LA RELACIÓN ENTRE POLÍGONOS

18) TEOREMA

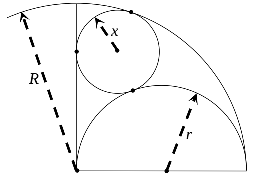
Si a y b son longitudes de las flechas o sagitas, entonces se cumple:



$$r = \sqrt{2 \cdot a \cdot b}$$

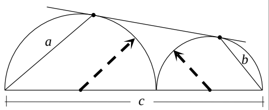
$$R = a + b + \sqrt{2 \cdot a \cdot b}$$

19) TEOREMA



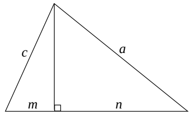
$$x = \frac{R}{4} ; \quad r = \frac{R}{2}$$

20) TEOREMA



$$\left(\sqrt[3]{c}\right)^2 = \left(\sqrt[3]{a}\right)^2 + \left(\sqrt[3]{b}\right)^2$$

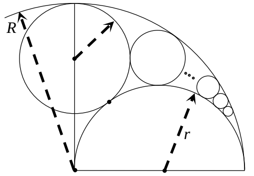
21) TEOREMA



$$c^2 - m^2 = a^2 - n^2$$

22) TEOREMA

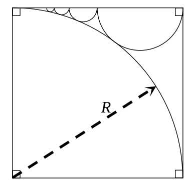
Existe "n" circunferencias, se cumple:



$$r_n = \frac{R}{n^2 + 2}$$

23) TEOREMA

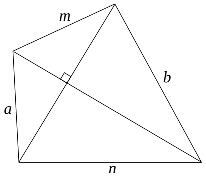
Existe "n" semi circunferencias Se cumple:



$$r_n = \frac{R}{2n(n+1)}$$

24) TEOREMA

Existe "n" semi circunferencias Se cumple:



$$a^2 + b^2 = m^2 + n^2$$

"Amarse a sí mismo es el comienzo de una aventura que dura toda la vida…."

O. WILDE

EL GROVEROSO

CAPITULO XV

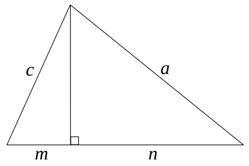
GEOMETRÍA PLANA O PLANIMETRÍA

RELACIONES MÉTRICAS EN ELTRIÁNGULO OBLICUÁNGULO Y EL CUADRILÁTERO

RELACIONES MÉTRICAS EN ELTRIÁNGULO OBLICUÁNGULO

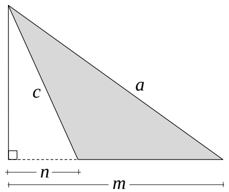
4. TEOREMA DE PROYECCIONES

a). Para un triángulo acutángulo



$$a^2-c^2=m^2-n^2$$

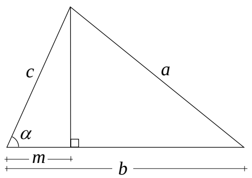
b). Para un triángulo obtusángulo



$$a^2-c^2=m^2-n^2$$

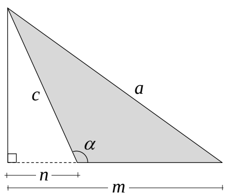
5. TEOREMA DE EUCLIDES

a). Para un triángulo acutángulo



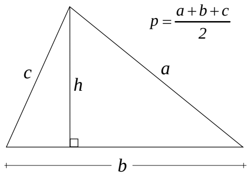
$$a^2=b^2+c^2-2\cdot b\cdot m$$

b). Para un triángulo obtusángulo



$$a^2=b^2+c^2+2\cdot b\cdot m$$

1. TEOREMA DE HERÓN

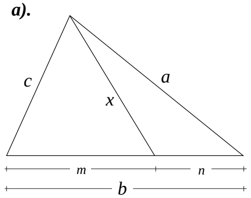


$$p=\frac{a+b+c}{2}$$

$$h=\frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

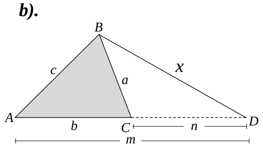
2. TEOREMA DE STEWART

a).



$$a^2m+c^2n=x^2b+bmn$$

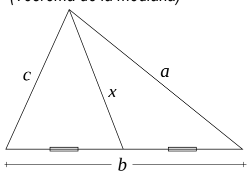
b).



$$a^2m-c^2n=x^2b-bmn$$

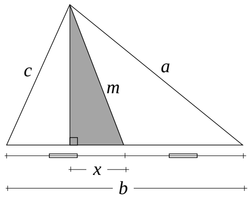
3. TEOREMA DE APOLONIO.

(Teorema de la mediana)



$$a^2+c^2=2x^2+\frac{b^2}{2}$$

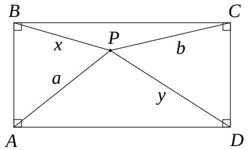
7. TEOREMA DE LA PROYECCIÓN DE LA MEDIANA



$$a^2-c^2=2bx$$

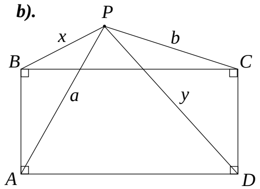
8. TEOREMA DE MARLEN

a).



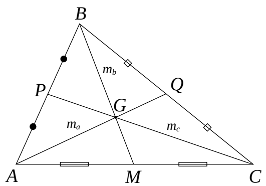
$$a^2+b^2=x^2+y^2$$

b).



$$a^2+b^2=x^2+y^2$$

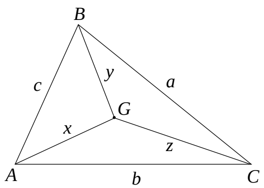
9. TEOREMA DE BOOTH



$$\frac{m_a^2+m_b^2+m_c^2}{AB^2+BC^2+AC^2}=\frac{3}{4}$$

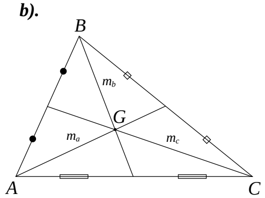
CASOS PARTICULARES

a). Si "G" es baricentro.



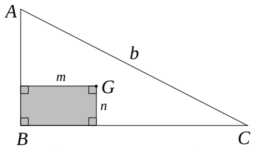
$$\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}=\frac{1}{3}$$

b).



$$m_a^2+m_c^2=5m_b^2$$

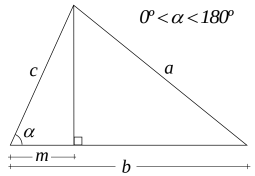
c). Si "G" es baricentro.



$$9(m^2+n^2)=b^2$$

10. TEOREMA DE CARNOT

$$0^\circ<\alpha<180^\circ$$



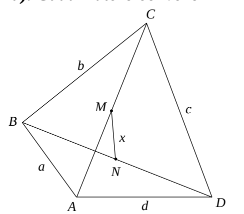
$$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot Cos\,\alpha$$

RELACIONES MÉTRICAS EN CUADRILÁTERO

1) TEOREMA DE EULER

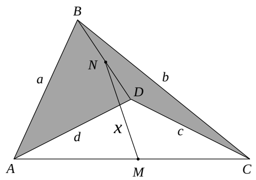
M y N : Puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ respectivamente

a). Cuadrilátero convexo



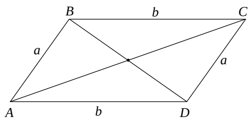
$$a^2+b^2+c^2+d^2=(AC)^2+(BD)^2+4x^2$$

b). Cuadrilátero no convexo



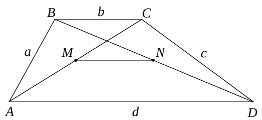
$$a^2+b^2+c^2+d^2=(AC)^2+(BD)^2+4x^2$$

b). Romboide



$$2(a^2+b^2)=(AC)^2+(BD)^2$$

b). Trapecio

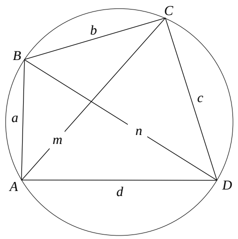


$$a^2+c^2+2bd=(AC)^2+(BD)^2$$

"... Más veces descubrimos nuestra sabiduría con nuestros disparates que con nuestra ilustración..." O. WILDE

3) TEOREMA DE PTOLOMEO

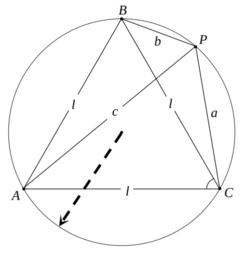
En todo cuadrilátero inscriptible



$$m\cdot n=a\cdot c+b\cdot d$$

4) TEOREMA DE CHADÚ

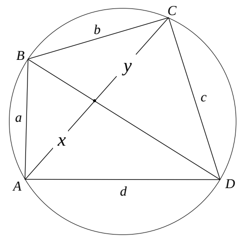
En todo cuadrilátero inscriptible



$$c=a+b$$

$$l^2=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}$$

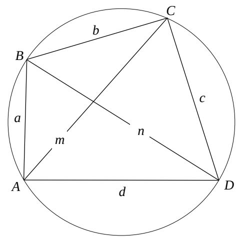
5) TEOREMA DE PACKEIN



$$\frac{x}{y}=\frac{ad}{bc}$$

6) TEOREMA DE VIETTE

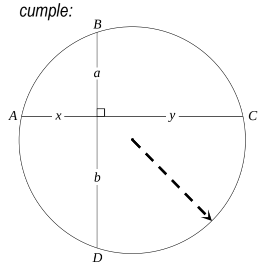
(2do. Teorema de Ptolomeo)



$$\frac{m}{n}=\frac{ad+bc}{ab+cd}$$

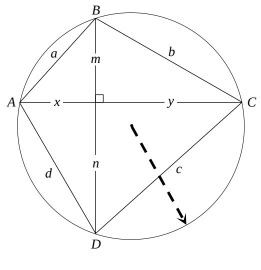
7) TEOREMA DE FAURE

Existe "n" circunferencias, se cumple:



$$x^2+a^2+y^2+b^2=4R^2$$

8) TEOREMA DE ARQUÍMIDES



$$a^2+d^2=b^2+c^2=4R^2$$

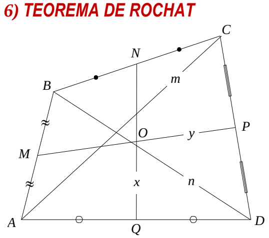
CAPITULO XVI

GEOMETRÍA PLANA O PLANIMETRÍA

RELACIONES MÉTRICAS EN EL CUADRILÁTERO Y LA CIRCUNFERENCIA

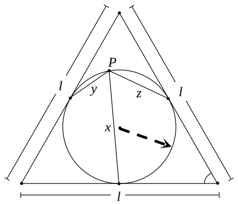
RELACIONES MÉTRICAS EN EL CUADRILÁTERO

6) TEOREMA DE ROCHAT



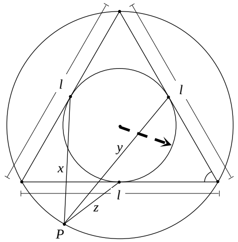
$$m^2+n^2=2\left(x^2+y^2\right)$$

7) TEOREMA



$$x^2+y^2+z^2=\frac{l^2}{2}$$

8) TEOREMA



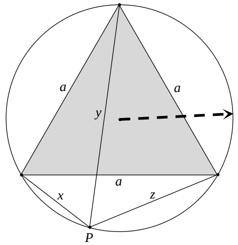
$$x^2+y^2+z^2=\frac{5}{4}l^2$$

Donde: $a=\frac{1}{r_1},\ b=\frac{1}{r_2},\ c=\frac{1}{r_3},\ d=\frac{1}{x}.$

Al resolver la ecuación cuadrática se obtiene:

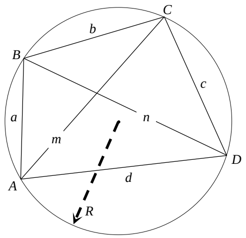
$$d=\pm\frac{1}{x} \qquad Si\begin{cases} d=-\frac{1}{x} \Rightarrow x=R \\ d=\frac{1}{x} \Rightarrow x=r \end{cases}$$

9) TEOREMA



$$x^2+y^2+z^2=2a^2$$

10) TEOREMA

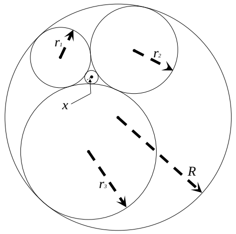


$$m=\sqrt{\frac{(ac+bd)(bc+ad)}{ab+cd}}$$

$$n=\sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}}$$

$$R=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{(ab+cd)(bc+ad)(ac+bd)}{p(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}$$

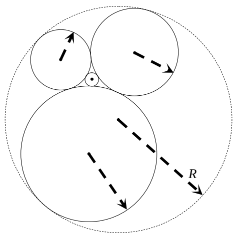
11) FÓRMULA DE SODDY



$$a^2+b^2+c^2+d^2=\frac{1}{2}(a+b+c+d)$$

12) TEOREMA DE SODDY

Si se tienen tres circunferencias de cualquier radio que sean tangentes dos a dos, siempre es posible trazar una cuarta quesea tangente a las otras tres.



Curvatura de una circunferencia

Es la inversa de la longitud del radio.

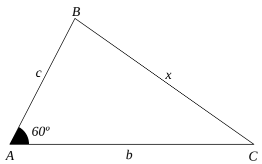
OBSERVACIÓN

La expresión dada por Federico Soddy, se puede transformar de modo que el cálculo del cuarto inverso sea más directo, dicha expresión es:

$$d=a+b+c\pm2\sqrt{ab+ac+bc}$$

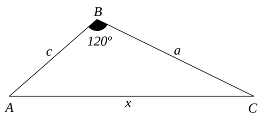
PROPIEDADES ADICIONALES

a). En la figura, se cumple:



$$x^2=b^2+c^2-b\cdot c$$

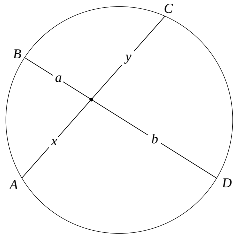
b). En la figura, se cumple:



$$x^2=a^2+c^2+a\cdot c$$

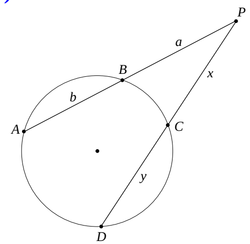
RELACIONES MÉTRICAS EN LA CIRCUNFERENCIA

1) TEOREMA DE LAS CUERDAS



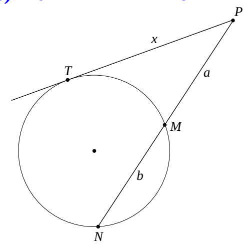
$$a\cdot b=x\cdot y$$

2) TEOREMA DE LAS SECANTES



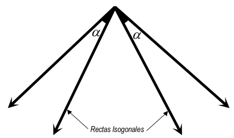
$$(a+b)a=(x+y)x$$

3) TEOREMA DE LA TANGENTE



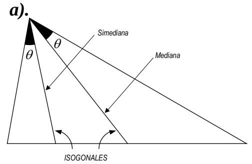
$$(a+b)a=x^2$$

RAYOS ISOGONALES

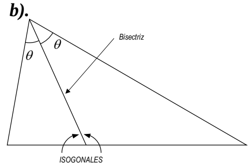


Isogonales de algunas Líneas Notables

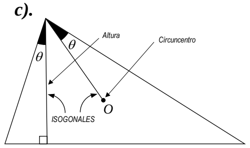
a).



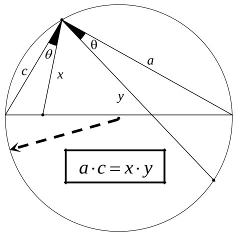
b).



c).

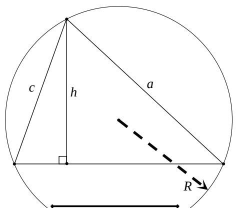


4) TEOREMA DE LAS RECTAS ISOGONALES



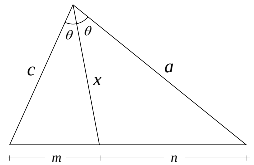
$$a\cdot c=x\cdot y$$

5) TEOREMA DEL PRODUCTO DE LOS LADOS DE UN △



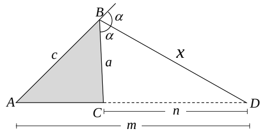
$$a\cdot c=h\cdot(2R)$$

6) TEOREMA DEL CÁLCULO DE LA BISECT. INTERIOR



$$x^2=a\cdot c-m\cdot n$$

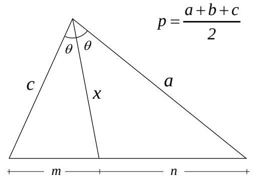
7) TEOREMA DEL CÁLCULO DE LA BISECT. EXTERIOR



$$x^2=m\cdot n-a\cdot c$$

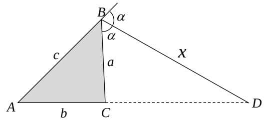
8) TEOREMA

$$p=\frac{a+b+c}{2}$$



$$x=\frac{2}{a+c}\sqrt{acp(p-b)}$$

9) TEOREMA



$$x=\frac{2}{c-a}\sqrt{ac(p-a)(p-c)}$$

$$p=\frac{a+b+c}{2}$$

" … Más veces descubrimos nuestra sabiduría con nuestros disparates que con nuestra ilustración…" O. WILDE

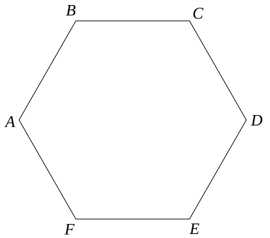
EL GROVEROSO

CAPITULO XVII

POLÍGONOS REGULARES

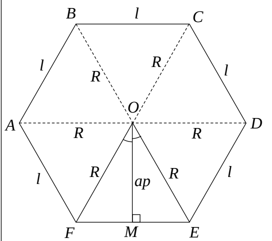
DEFINICIÓN

Es aquel polígono equilátero, donde los pares angulares que forman sus lados son congruentes.



El polígono ABCDEF, es regular.

ELEMENTOS



O: Centro

R. Circunradio

$\overline{OM}$: Apotema (ap)

$\left(\overline{OM}\perp\overline{AB}\right)$; $(AM=MB)$

ΔEOF : Δ elemental del polig.

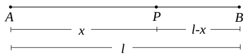
$\measuredangle EOF$: Angulo central.

"Es peligroso escuchar. Se corre el riesgo de que le convenzan; y un hombre que permite que le convenzan con una razón, es un ser absolutamente irracional…"
O. WILDE

EL GROVEROSO

OBSERVACIÓN

DIVISIÓN DE UN SEGMENTO EN MEDIA Y EXTREMA RAZÓN



Según la figura $P\in\overline{AB}$, $\overline{AP}>\overline{AB}$

y $\dfrac{AB}{AP}=\dfrac{AP}{PB}$.

Remplazando y operando:

$\dfrac{l}{x}=\dfrac{x}{l-x}$

$x^2+lx-l^2=0$

$x=l\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$ o $AP=AB\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$

Esto significa que:

$\overline{AP}$ es la sección áurea de $\overline{AB}$

NOTA

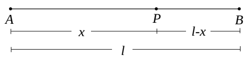
$\phi=\left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$: es el número áureo

$\phi'=\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$: es el conjugado del número áureo

TEOREMA

En un segmento $\overline{AB}$, si P divide en media y extrema razón (AP > PB), se cumple que $\overline{PB}$ es la sección áurea de $\overline{AP}$.

Es decir:



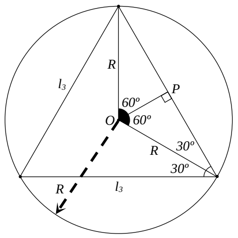
Si $AP=AB\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$

Entonces cumple que:

$$\boxed{PB=AP\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)}$$

POLÍGONOS REGULARES NOTABLES

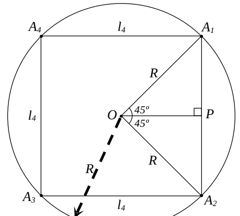
TRIÁNGULO REGULAR



$\theta_3=120^o$, $l_3=R\sqrt{3}$

$ap_3=\dfrac{R}{2}$

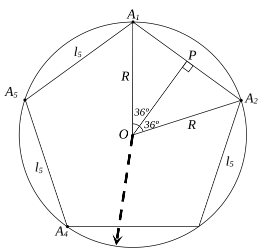
CUADRILÁTERO REGULAR



$\theta_4=90^o$, $l_4=R\sqrt{2}$

$ap_4=\dfrac{R}{2}\sqrt{2}$

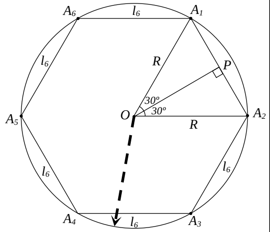
PENTÁGONO REGULAR



$\theta_5=72^o$, $l_5=\dfrac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

$ap_5=\dfrac{R}{2}\left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$

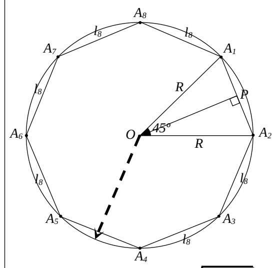
HEXÁGONO REGULAR



$\theta_6=60^o$, $l_6=R$

$ap_6=\dfrac{R}{2}\sqrt{3}$

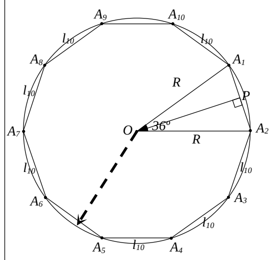
OCTÁGONO REGULAR



$\theta_8=45^o$, $l_8=R\sqrt{2-\sqrt{2}}$

$ap_8=\dfrac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$

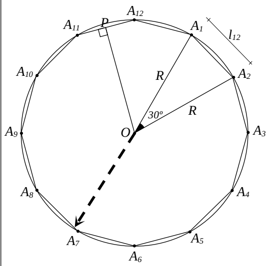
DECÁGONO REGULAR



$\theta_{10}=36^o$, $l_{10}=R\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$

$ap_{10}=\dfrac{R}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$

DODECÁGONO REGULAR

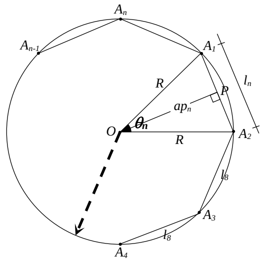


$\theta_{12}=30^o$, $l_{12}=R\sqrt{2-\sqrt{3}}$

$ap_{12}=\dfrac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$

GENERALIZANDO

Para cualquier polígono regular de "n" lados:



$\theta_n=\dfrac{360^o}{n}$,

$l_n=R\sqrt{2\left(1-Cos\ \theta_n\right)}$

$ap_n=\dfrac{1}{2}\sqrt{\left(2R\right)^2-\left(l_n\right)^2}$

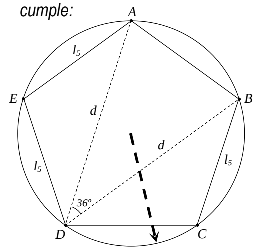
Para cualquier polígono regular de "2n" lados:

$$\boxed{l_{2n}=\sqrt{2R^2-R\sqrt{4R^2-\left(l_n\right)^2}}}$$

TEOREMAS DE LA RELACIÓN ENTRE POLÍGONOS

1) TEOREMA

En todo pentágono regular, se cumple:



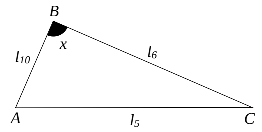
$$\boxed{l_5=d\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)}$$

2) TEOREMA

En todo decágono regular, se cumple:

$$\boxed{l_{10}=R\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)}$$

3) TEOREMA



$$\boxed{\left(l_5\right)^2=\left(l_6\right)^2+\left(l_{10}\right)^2}$$

$\therefore$ $\boxed{x=90^o}$

4) TEOREMA

El lado del polígono regular, cuyo número de lados puede expresar como "2^n", donde "n" es un número natural mayor o igual que 2, tiene por longitud:

$$\boxed{l_{2^n}=R\sqrt{2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{(n-1)\ radicales}}}$$

5) TEOREMA

Medida del lado de un pentadecágono

$$\boxed{l_{15}=\dfrac{R}{4}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{15}+\sqrt{3}\right)}$$

7) TEOREMA

Todo polígono equiángulo inscrito en una circunferencia de número impar de lados, y todo polígono equilátero circunscrito a una circunferencia de número impar de vértices, es regular.

8) TEOREMA

Calculo de la longitud de una cuerda cuyo arco determinado mide:

a) $mAB=150^o$ (l_6, l_4)

$$\boxed{AB=\dfrac{R\sqrt{2}}{2}\left(1+\sqrt{3}\right)}$$

ó

$$\boxed{AB=R\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$

b) $mAB=144^o$ (l_5, l_5)

$$\boxed{AB=R\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}}}$$

ó

$$\boxed{AB=\dfrac{R}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$$

c) $mAB=135^o$ (l_4, l_8)

$$\boxed{AB=R\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

d) $mAB=108^o$ (l_5, l_{10})

$$\boxed{AB=R\left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right)}$$

CAPITULO XVIII

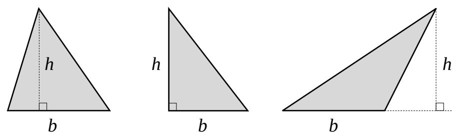
Área de Regiones Triangulares

CALCULO DE AREAS

mediante

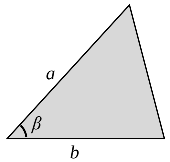
Fórmula básica

T. Acutángulo — T. Rectángulo — T. Obtusángulo



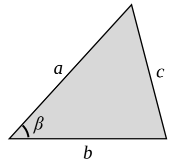
$$A_{\triangle}=\frac{bh}{2}$$

Fórmula Trigonométrica



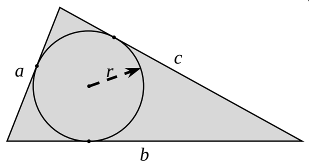
$$A_{\triangle}=\frac{ab}{2}Sen\beta$$

Fórmula de Herón



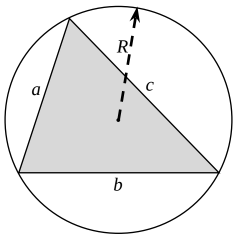
Sea $p=\dfrac{a+b+c}{2}$

$$A_{\triangle}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

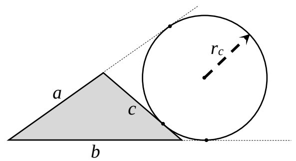


Sea $p=\dfrac{a+b+c}{2}$

$$A_{\triangle}=p\cdot r$$

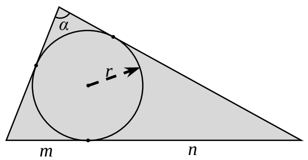


$$A_{\triangle}=\frac{abc}{4R}$$

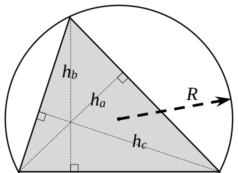


Sea $p=\dfrac{a+b+c}{2}$

$$A_{\triangle}=(p-c)\cdot r_c$$



$$A_{\triangle}=mn\cdot Cot\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

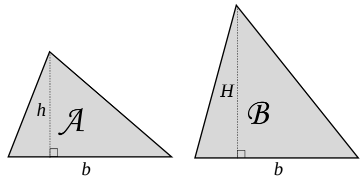


$$A_{\triangle}=\sqrt{\frac{R}{2}\cdot h_a\cdot h_b\cdot h_c}$$

RELACION DE ÁREAS

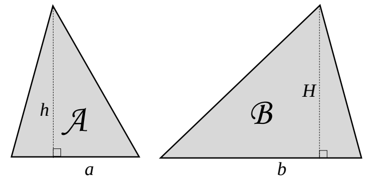
según

Lado en común



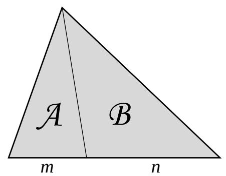
$$\frac{A}{B}=\frac{h}{H}$$

Altura en

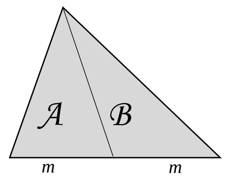


$$\frac{A}{B}=\frac{a}{b}$$

entonces

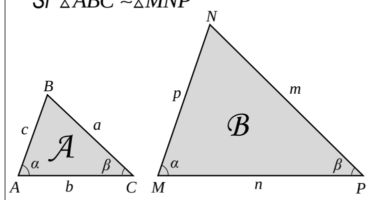


$$\frac{A}{B}=\frac{m}{n}$$



$$A=B$$

Si $\triangle ABC\sim\triangle MNP$



$$\frac{A}{B}=\frac{a^2}{m^2}=\frac{c^2}{p^2}=\frac{h^2}{H^2}=\cdots$$

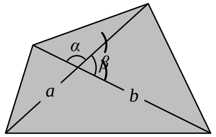
EL GROVEROSO

CAPÍTULO IX Área de Regiones Cuadrangulares y Circulares

AREA DE REGIONES CUADRANGULARES

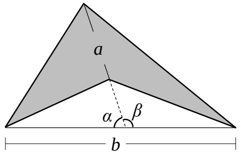
Fórmula General

Trapezoide convexo



$$A_{\square}=\frac{ab}{2}Sen\beta$$

Trapezoide no convexo

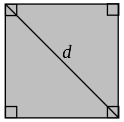


$$A_{\square}=\frac{ab}{2}Sen\beta$$

$$\alpha+\beta=180 \rightarrow Sen\alpha = Sen\beta$$

Fórmulas Básicas

Cuadrado

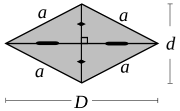


$A_{\square}=a^2$ o $A_{\square}=\frac{d^2}{2}$

Rectángulo

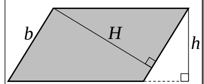
$A_{\square}=ab$

Rombo



$$A_{\lozenge}=\frac{Dd}{2}$$

Romboide

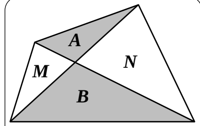


$A_{\square}=Bh$ o $A_{\square}=bH$

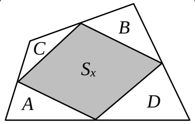
Trapecio

$$A=\left(\frac{B+b}{2}\right)h$$

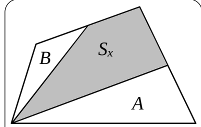
Relaciones entre Áreas



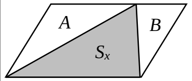
$A\times B = M\times N$



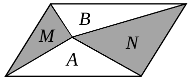
$S_x=\frac{S}{2}$ ∨ $A+B=C+D$



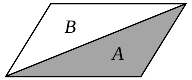
$S_x=A+B$



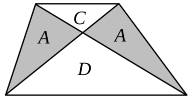
$S_x=A+B$



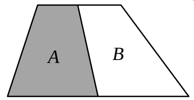
$A+B=M+N=\frac{S}{2}$



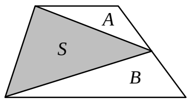
$A=B$



$A^2=C\times D$



$A=B$

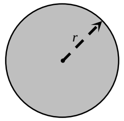


$S=A+B$

AREA DE REGIONES CIRCULARES

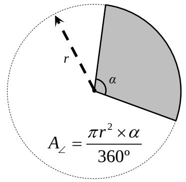
Fórmulas Básicas

Circulo



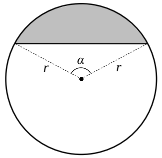
$A_{\bigcirc}=\pi r^2$

Sector circular



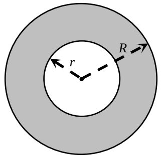
$$A_{\angle}=\frac{\pi r^2\times\alpha}{360^{o}}$$

Segmento circular



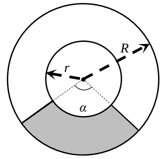
$$A_{\angle}=\frac{\pi r^2\times\alpha}{360^{o}}-\frac{r^2}{2}Sen\alpha$$

Corona circular



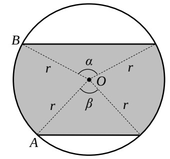
$A_{\bigcirc}=\pi\left(R^2-r^2\right)$

Trapecio circular



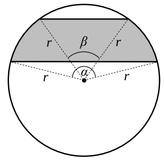
$$A_{\bigcirc}=\frac{\pi\left(R^2-r^2\right)\times\alpha}{360}$$

Zona o faja circular



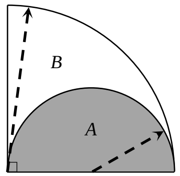
$$A_{zona}=2A_{AOB}+\frac{r^2}{2}(Sen\beta-Sen\alpha)$$

Zona o faja circular

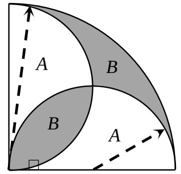


$$A_{zona}=\left(\frac{\alpha\pi r^2}{360^{o}}-\frac{r^2}{2}Sen\alpha\right)-\left(\frac{\beta\pi r^2}{360^{o}}-\frac{r^2}{2}Sen\beta\right)$$

Relaciones entre Áreas



$A=B$

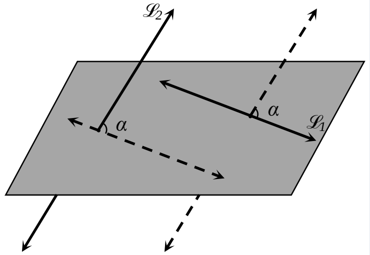


Geometría del espacio

NOCIONES BÁSICAS

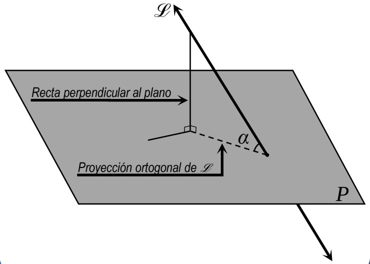
PUNTO.
RECTA .
PLANO (Determinación de un plano).

Rectas Alabeadas

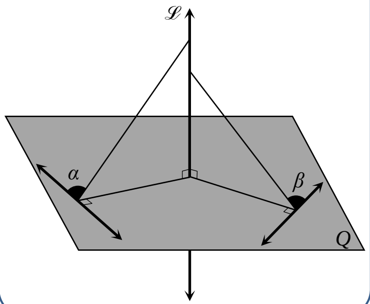


$\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ son rectas alabeadas

Ángulo entre recta y plano

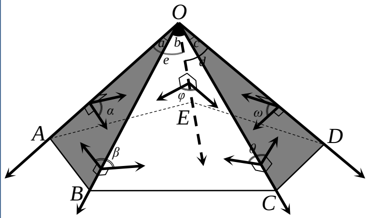


Teorema de las 3 restas perpendiculares



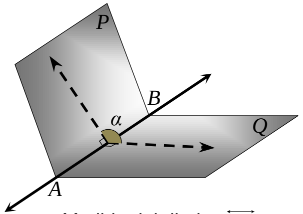
ÁNGULOS

ANGULO POLIEDRO



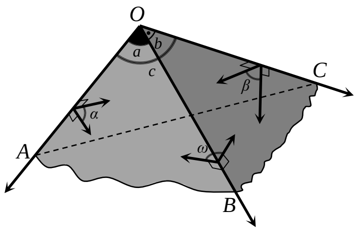
O-ABCDE : Ángulo poliedro
a, b, c, d, e : Ángulo de las caras.
α, β, θ, ω, φ : Ángulos diedros

ANGULO DIEDRO



α, Medida del diedro $\overleftrightarrow{AB}$

ANGULO TRIEDRO



O-ABC : Ángulo Triedro

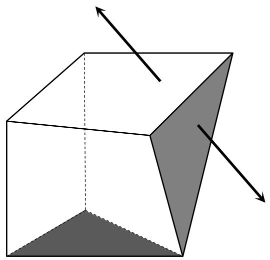
Triedro Escaleno
Si $a \neq b \neq c \quad \wedge \quad \alpha \neq \beta \neq \theta$

Triedro Isósceles
Si $a = b \neq c \quad \wedge \quad \alpha = \beta \neq \theta$

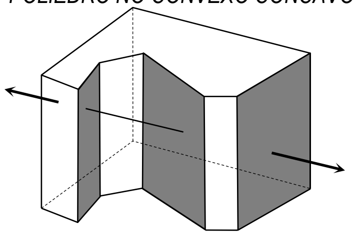
Triedro Equilátero
Si $a = b = c \quad \wedge \quad \alpha = \beta = \theta$

POLIEDROS

POLIEDRO CONVEXO



POLIEDRO NO CONVEXO CONCAVO



TEOREMA DE EULER

En todo polígono convexo, se cumple

$$\boxed{C + V = A + 2}$$

$C \rightarrow$ Número de caras
$V \rightarrow$ Número de vértices
$A \rightarrow$ Número de aristas

PROPIEDADES DE LOS TRIEDROS

1. $\boxed{b - c < a < b + c}$
2. $\boxed{0^{\circ} < a + b + c < 630^{\circ}}$
3. $\boxed{180^{\circ} < \alpha + \beta + \theta < 540^{\circ}}$
4. $\boxed{\alpha + \beta < \theta + 180^{\circ}}$

TEOREMA
Para un poliedro formado por k polígonos de n lados, k_1 polígonos de n_1 lados,... hasta k_m polígonos de n_m lados, se cumple:

$$\boxed{A = \frac{k \cdot n + k_1 \cdot n_1 + \cdots + k_m \cdot n_m}{2}}$$

TEOREMA
Para poliedros cuyas caras son polígonos del mismo número de lados, se cumple:

$$\boxed{A = \frac{C \times n}{2}}$$

TEOREMA
En todo poliedro se cumple:

$$\boxed{\sum m\measuredangle i = 360^{\circ}(V - 2)} \text{ ó}$$

$$\boxed{\sum m\measuredangle i = 360^{\circ}(A - C)}$$

TEOREMA
El número de diagonales de todo poliedro se determina así:

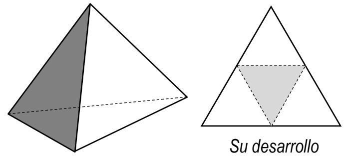
$$\boxed{\#D = C_2^{v} - A - \#DC} \text{ ó}$$

$$\boxed{\#D = \frac{V(V-1)}{2} - A - \#DC}$$

Donde:
$C \rightarrow$ Número de caras
$V \rightarrow$ Número de vértices
$A \rightarrow$ Número de aristas
$\#D \rightarrow$ Num. De diagonales del poliedro
$DC \rightarrow$ Núm. de Diagonales de todas las caras del poliedro.
$C_2^{v} \rightarrow$ Combinación del número de vértices de dos en dos.

POLIEDROS REGULARES O PLATÓNICOS

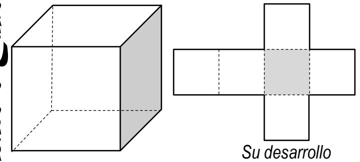
Tetraedro



$C = 4, \quad V = 4 \quad y \quad A = 6$

$h = (a\sqrt{6})/3$
$Ap = (a\sqrt{6})/12$
$A_{Total} = a^2\sqrt{3}$
$V = (a^3\sqrt{2})/12$

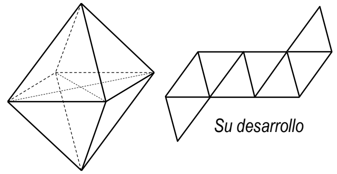
Exaedro o Cubo



$C = 6, \quad V = 8 \quad y \quad A = 12$

$D = a\sqrt{3}$
$Ap = a/2$
$A_{Total} = 6a^2$
$V = a^3$
$h = a$

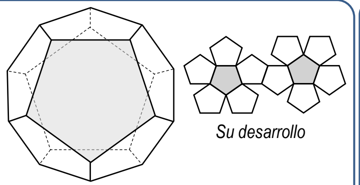
Octoedro



$C = 8, \quad V = 6 \quad y \quad A = 12$

$D = a\sqrt{2}$
$Ap = a\sqrt{6}/6$
$A_{Total} = 2\sqrt{3}a^2$
$V = (a^3\sqrt{2})/3$

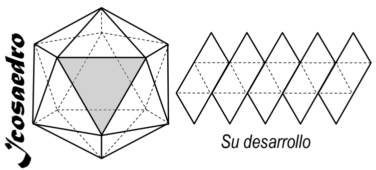
Dodecaedro



$C = 12, \quad V = 20 \quad y \quad A = 30$

$Ap = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{10}}$
$A_{Total} = 15a^2\sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}}$
$V = \frac{5a^3}{2}\sqrt{\frac{47 + 21\sqrt{5}}{10}}$

Icosaedro

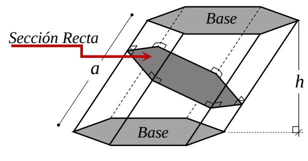


$C = 20, \quad V = 12 \quad y \quad A = 30$

$Ap = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{7 + 3\sqrt{5}}{6}}$
$A_{Total} = 5\sqrt{3}a^2$
$V = \frac{5}{6}a^3\sqrt{\frac{7 + 3\sqrt{5}}{2}}$

Sólidos

PRISMAS



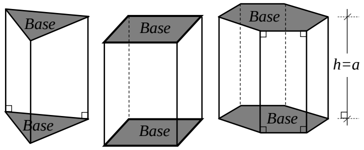
$V = A_{base} \times h$

$V = A_{S.R} \times a$

$A_{S.L} = 2P_{base} \times h$

$A_{S.L} = 2P_{S.R} \times a$

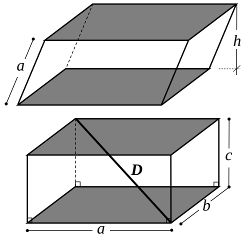
PRISMA RECTO



$V = A_{base} \times h$

$A_{S.L} = 2P_{base} \times h$

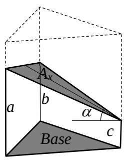
PARELELEPIPEDO



$D^2 = a^2 + b^2 + c^2$ $\quad V = abc$

$A_{total} = 2(ab + bc + ac)$

TRONCO DE PRISMA

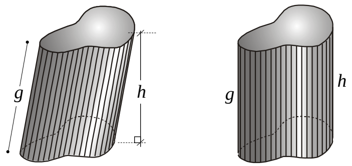


$V = A_{base} \times \left(\frac{a+b+c}{2}\right)$

$A_{S.L} = 2P_{base} \times \left(\frac{a+b+c}{2}\right)$

$A_{base} = A_x \times Cos\,\alpha$

CILINDROS

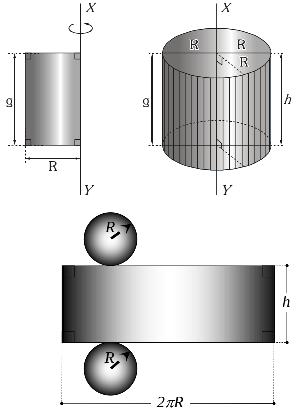


Cilindro $\quad$ Cilindro recto

$V = A_{base} \times h$

$A_{S.L} = 2P_{base} \times h$

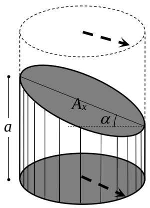
CILINDRO CIRCULAR RECTO (Cilindro de Revolución)



$V = \pi R^2 h$

$A_{S.L} = 2\pi Rh$ $\quad A_{Total} = 2\pi R(h+R)$

TRONCO DE CILINDRO

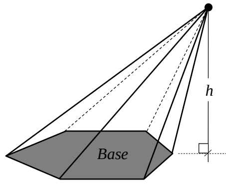


$V = A_{base} \times \left(\frac{a+b}{2}\right)$

$A_{S.L} = 2P_{base} \times \left(\frac{a+b}{2}\right)$

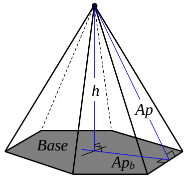
$A_{base} = A_x \cdot Cos\,\alpha$

PIRÁMIDE



$V = \frac{1}{3} A_{base} \times h$

PIRAMIDE RECTO Y REGULAR



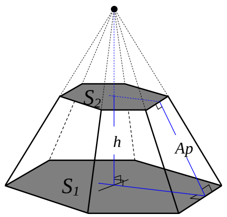
Ap: Apotema lateral
Ap_b: Apotema basal

$V = \frac{1}{3} A_{base} \times h$

$A_{S.L} = 2P_{base} \times Ap$

$A_{Total} = A_{S.L} \cdot A_{base}$

TRONCO DE PIRAMIDE REGULAR

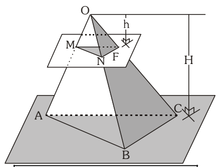


$V = \frac{h}{3}\left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 \times S_2}\right)$

$A_{S.L} = \left(P_{base\ Mayor} + P_{base\ Menor}\right) \times Ap_{Tronco}$

$A_{Total} = A_{S.L} + S_1 + S_2$

En todo pirámide, se cumple:

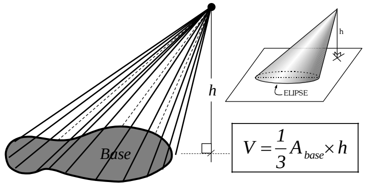


1. $\frac{OM}{OA} = \frac{ON}{OB} = \frac{OF}{OC} = \frac{h}{H}$

2. $\frac{V_{O-MNF}}{V_{O-ABC}} = \frac{OM^3}{OA^3} = \cdots = \frac{h^3}{H^3}$

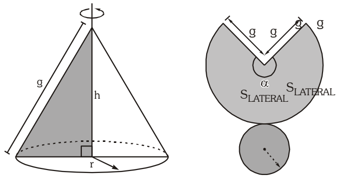
3. $\frac{A_{MNF}}{A_{ABC}} = \frac{OM^2}{OA^2} = \cdots = \frac{h^2}{H^2}$

CONO



$V = \frac{1}{3} A_{base} \times h$

CONO RECTO O DE REVOLUCIÓN

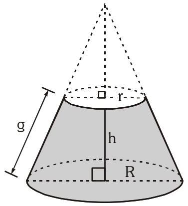


$A_{S.L} = \pi rg$

$A_{Total} = \pi r(g + r)$

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h$

TRONCO DE CONO RECTO O DE REVOLUCIÓN

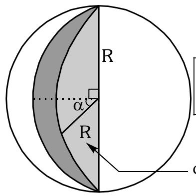


$A_{S.L} = \pi g(r + R)$

$A_{Total} = \pi g(r + R) + \pi(r^2 + R^2)$

$V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + Rr)$

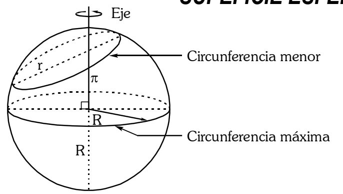
4. Cuña esférica



$V_{CUÑA} = \frac{\pi R^3 \times \alpha}{270^o}$

ESFERA PAPPUS-GULDIN

SUPEFICIE ESFERICA

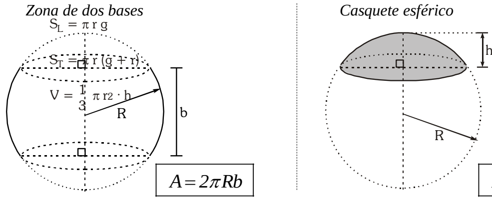


$A = 4\pi R^2$

PARTES DE LA SUPERFICIE ESFÉRICA

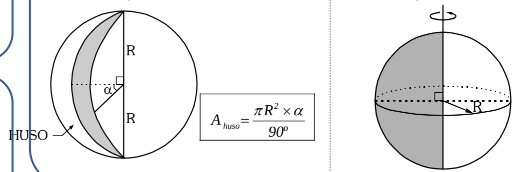
1. Uso Esférico

Zona de dos bases $\quad$ Casquete esférico



$A = 2\pi Rb$ $\quad A = 2\pi Rh$

1. Uso Esférico $\quad$ 3. Esfera

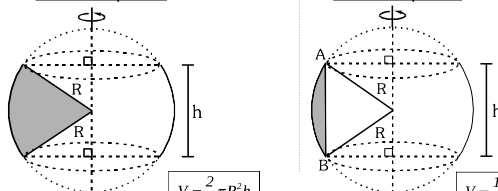


$A_{huso} = \frac{\pi R^2 \times \alpha}{90^o}$ $\quad V = \frac{4}{3}\pi R^3$

1. $S_{LATERAL} = \pi g(r+R)$

PARTES DE VOLUMENES ESFÉRICA

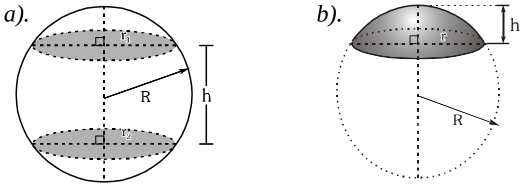
2. Sector Esférico $\quad$ 2. Anillo Esférico



$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h$ $\quad V = \frac{1}{6}\pi (AB)^2 \cdot h$

3. Segmento Esférico

a). $\quad$ b).



$V = \frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{\pi h}{2}(r_1^2 + r_2^2)$ $\quad V = \frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{\pi r^2}{2} h$